PONTIFICIA UNIVERSITAS GREGORIANA

PHILIPPUS SOCCORSI S. J.

QUAESTIONES SCIENTIFICAE
CUM PHILOSOPHIA CONIUNCTAE

DE PHYSICA QUANTICA

ad usum auditorum

ROMAE 1956

ROMAE 1956 - TYPIS PONTIFICIAE UNIVERSITATIS GREGORIANAE

INTRODUCTIO

Ineunte saeculo XX, Max Planck novam hypothesim produxit de structura energiae, quae paulatim omnem physicam permeavit et funditus transformavit.

Physica classica talem censuerat esse energiam, quae modo continuo posset augeri, dividi et distribui, ita ut deduci etiam posset ad partes infinitesimas evanescentes : ea ipsa ratione qua spatium geometricum, quod continuum est, continuo modo augeri vel imminui potest, necnon in indefinitum dividi. Eadem etiam est indoles calculi infinitesimalis, qui perpendit variationes infinitesimas (seu evanescentes) entium sive mathematicorum sive physicorum. Quare calculus infinitesimalis congruum instrumentum porrexerat physicae classicae ad describenda, inter cetera, etiam variationes energeticas.

Planck vero postulavit energiam exhibere structuram granularem ; concepit scilicet energiam velut constitutam granulis energeticis ea fere ratione qua massa materiae constituitur atomis ; has quantitates elementares energiae denominavit « quanta » energiae.

Talem hypothesim Planck primo postulavit pro peculiari phaenomeno ; sed dein ipsa hypothesis magis ac magis et cum felicissimo successu ceteris phaenomenis applicata est.

Primum phaenomenon, ad quod explicandum Planck hypothesim « quanticam » excogitavit, illud est quod denominatur « spectrum corporis nigri ». Agebatur de explicanda lege (iam empirice definita) qua energia distribuitur diversa ratione inter varias radiationes (variis frequentiis praeditas), quas emittit « corpus nigrum » cum, satis calefactum, candescit.

Theorica explicatio huius phaenomeni arduis difficultatibus obnoxia erat ; sed Planck egregie solvit problema ponendo ultimas particulas materiae irradiare energiam per « quanta », seu per definitas guttulas energeticas.

Structura horum granulorum energiae exprimitur fundamentali formula physicae quanticae:

$$\varepsilon = h \cdot \nu$$

in qua ε denotat « quantum » energiae; ν exprimit frequentiam radiationis; h est coëfficiens constans, qui universatim idem est pro qualibet radiatione, cuiuslibet frequentiae.

Factor h non exprimit coëfficientem mere numericum; sed significatio physica ei competit; stat enim relatio:

$$h = \varepsilon / \nu$$

vel, cum stet aequalitas $\nu = 1/\tau$ (τ = periodus radiationis, seu tempus per quod absolvitur una oscillatio), scribere etiam possumus:

$$h = \varepsilon \cdot \tau = \text{energia} \times \text{tempus}$$

Agitur propterea de illa magnitudine physica quae denominatur « actio », quae aestimatur ex producto cuiusdam energiae per illud tempus per quod status ille energeticus evolvitur; vel, quod ad idem redit, « actio » aestimatur ex producto cuiusdam quantitatis motus ($m \cdot v$) per spatium (s) percursum. Structura « actionis » comparari potest cum structura « laboris », qui aestimatur ex producto virium (applicatarum cuidam massae) per spatium percursum (sub impulsu ipsarum virium): in utroque casu agitur de magnitudinibus non staticis, sed fluentibus, quae evolvuntur per spatium et per tempus.

Tali autem « actioni » Planck tribuit structuram granularem, velut atomicam, colligendo etiam definitum valorem pro « quanto » elementari actionis; scilicet (iuxta recensiores mensuras):

$$h = 6{,}61 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec.}$$

Quare phaenomena ita supponuntur evolvi ut nulla « actio » produci possit, quae minor sit quam « quantum » elementare h; quaelibet autem alia « actio » constat numero quodam integro « quantorum » elementarium. Hypothesis igitur de structura granulari energiae radicitus involvit hypothesim de structura velut atomica « actionis ».

Ut diximus, haec hypothesis primo postulata est pro peculiari phaenomeno; sed dein applicata est ad cetera phaenomena explicanda, ita ut tandem totam physicam permeaverit.

* * *

Notanda autem est quaedam radicalis oppositio inter novam rationem concipiendi et bases theoreticas physicae classicae. Oppositio talis est ut introductio novae physicae quanticae ad profundam crisim adduxerit totam physicam classicam. Solutio crisis comprobavit physicam classicam ineptam esse ad describendam microstructuram sive materiae sive energiae.

Lineamentum characteristicum, quod distinguit physicam classicam et quod cum physica quantica nequit componi, illud est quod exprimitur peculiaribus legibus « variationalibus », quae supponunt magnitudines physicas variari posse modo continuo.

Duo exempla, quorum alterum respicit motum corporum, alterum irradiationem energiae, satis declarant hanc notam characteristicam physicae classicae.

Motus mechanicus puncti materialis obtemperat illi legi variationali quae dicitur « principium minimae actionis ». Scilicet, traiectoria naturalis puncti materialis ita evolvitur inter duo puncta A et B, ut eius actio sit minima respectu omnium actionum, quae componerentur si traiectoriae (inter illa ipsa extrema A, B) variarentur variationibus infinitesimis, seu evanescentibus, quae infra quemlibet definitum limitem descendere possent. Agitur propterea de lege quae postulat quamdam summam oeconomiam « actionis » in motibus naturalibus. Haec lex denominatur etiam « principium Hamilton »; et est lex vere fundamentalis mechanicae, quae resumit omnes leges dynamicae classicae.

Si de phaenomenis opticis agitur, stat analogum principium — « principium Fermat » — quod postulat summam oeconomiam temporis. Traiectoriae radiorum (quae varie flectuntur pro vario indice refractionis medii) obtemperant legi « minimi temporis »; scilicet, radii lucis illas traiectorias naturali-

ter percurrunt inter duo puncta A et B, quae sinunt minimum dispendium temporis, respectu ceterarum traiectoriarum quae a traiectoriis naturalibus discrepent variationibus infinitesimis; varia autem tempora requisita colliguntur ex variis velocitatibus radiorum per varias partes spatii; hae autem velocitates nectuntur cum variis valoribus indicis refractionis. Haec una lex synthetice resumit totam eam partem opticae (« opticam geometricam » denominatam), quae describit phaenomena macroscopica, radios lucis tractando ut lineas simplices, quae vel recta pergunt, vel tantum flectuntur et franguntur iuxta solas leges reflexionis et refractionis.

Principium Fermat congruit etiam cum theoria undulatoria lucis, quae non minus quam theoria corpuscularis definit traiectorias radiorum, quamvis ipsis tribuat significationem diversam: iuxta theoriam corpuscularem, radii lucis induunt significationem physicam, quia sunt ipsae traiectoriae quas corpuscula luminifica percurrunt; iuxta autem theoriam undulatoriam, radii sunt entia geometrica, seu directiones iuxta quas progrediuntur per spatium superficies undarum. Ad has descriptiones geometricas perficiendas principium Huygens-Fresnel theoriae undulatoriae idem valet ac principium Fermat.

Si de optica microscopica agitur, alia phaenomena exstant (diffractionis scilicet et interferentiae lucis), quorum causa optica (quae « physica » denominatur) discedit a simplicioribus descriptionibus opticae geometricae. Ipsum vero principium Huygens-Fresnel etiam hanc partem opticae bona approximatione describit, supponendo tamen energiam radiantem modo continuo diffundi posse, una cum undis, etiam attingendo densitates evanescentes, quae descendere possint infra quemlibet definitum limitem quantumvis infimum.

Radicalis oppositio inter hanc rationem concipiendi et hypothesim Planck accurate et profunde demonstrata est a Lorentz et Poincaré. Hae demonstrationes ostendunt nulla systemata irradiantia, quae obtemperent legibus classicis typi hamiltoniani, producere posse talem distributionem energiae in spectro corporis nigri, qualem mensurae empiricae manifestant et Planck theoretice explicavit.

* * *

Crisis, ad quam tota physica deducta est propter inventum Planck, profunda fuit et valde gravis.

Nova enim hypothesis necessario admittenda erat, sicut plura argumenta iam sine aequivocatione postulabant; sed haec ipsa hypothesis, quae respuebat principia classica, impar per se erat ad adaequatum fundamentum iacendum totius physicae; quare, initio, necessaria fuit quaedam hybrida copulatio hypothesis quanticae cum ipsis descriptionibus physicae classicae, quae principia opposita supponebant. Valde autem pugnabat cum severa indole logica scientiae physicae tale hybridum systema, complectens principia opposita.

Ad hunc propositum Poincaré, anno 1910, apud « Consilium Solvay » (Bruxelles) animadverterat: « Ce qui m'a frappé dans les discussions que nous venons d'entendre, c'est de voir une même théorie s'appuyer tantôt sur les principes de l'ancienne méchanique, tantôt sur les nouvelles hypothèses qui en sont la négation; on ne doit pas oublier qu'il n'est pas de proposition qu'on ne puisse aisément démontrer, pour peu que l'on fasse entrer dans la démonstration deux prémisses contradictoires ».

Quod monitum rectissimum quidem est; tamen non est unicum principium logicum; aliud principium monet ex falso erui posse etiam conclusiones veras. Quodlibet falsum enim nequit esse ex toto falsum, sed habendum est ut totum quoddam complectens vera et falsa; quare ex eo erui etiam possunt assertiones verae.

Iamvero physica classica, etsi inepta ad describendam microstructuram mundi physici, tamen manifesto plurima vera detexerat: non ergo ex toto eiuranda erat; et iure ab ipsa quaeri poterant notitiae etiam de microcosmo, qui procul dubio talis censendus erat ut summa plurimorum phaenomenorum elementarium produceret illa ipsa lineamenta macroscopica, quae physica classica iam bene expresserat.

Aliis verbis, non solae discrepantiae notandae erant inter physicam classicam et physicam quanticam, sed etiam earum

congruentiae, quae deesse non poterant: non enim dari possunt duae scientiae physicae inter se pugnantes, altera de macrocosmo altera de microcosmo; sed nonnisi una physica datur, sicut una est natura rerum sine internis incongruentiis. Propterea, si quaedam incongruentiae exstant inter varia capita physicae, hae procul dubio adscribendae sunt nostro imperfecto modo repraesentandi naturam rerum. Physica igitur classica, non obstantibus eius praeclaris successibus, dicenda erat non omnibus numeris absoluta, et naturam rerum repraesentare lineamentis neque exactis neque propriis; quae imperfectiones et incongruentiae, etsi adeo exiguae quae practice negligendae sint si perpenduntur phaenomena macroscopica, sufficiunt tamen ut essentialiter detorqueant repraesentationem microcosmi. Ex alia parte vero, physica classica, sua ipsa congruentia cum macrocosmo, indicat terminum ad quem ducere debet summa plurimorum phaenomenorum microscopicorum.

* * *

Iuxta criteria logica nuper exposita, per duo saltem decennia, invaluit illa peculiaris methodus investigationis, quae apte denominatur « semiclassica », et cuius praecipuus auctor fuit Bohr.

Bohr et alii eximii physici aggressi sunt studium de structura atomorum inserendo hypothesim quanticam in ipsis classicis expressionibus phaenomenorum; quae insertio, etsi hybrida et non sibi constans, non imprudenter facta est, immo magna sagacitate: ex una parte enim leges classicae indicabant terminum macroscopicum, cum quo novae descriptiones tandem congruere debebant; ex alia parte experimenta circa microcosmum argumenta praebebant ad secernendas aptas et ineptas conclusiones.

Fructus huius laboriosae investigationis fuit notum illud exemplar atomicum, exhibitum ad instar systematis planetarii, nimis undique definiti.

Distinguuntur in atomo pars nuclearis, protonibus et neutronibus constituta, et pars peripherica, complectens etiam plures

stratus electronicos. Singula electrona percurrunt orbitas circa nucleum: hac de causa in nucleum non irruunt, quia vis centrifuga motus orbitalis compensat vires attractivas inter onera positiva (nuclei) et onera negativa (electronum). Singulis electronibus competit definitus status energeticus, qui componitur ex energia potentiali (nexa cum dictis viribus attractivis) et ex energia cinetica (nexa cum motu orbitali). Omnes autem motus orbitales et relativi status energetici electronum computati sunt iuxta leges classicas mechanicae et electromagnetismi.

Insertio hypothesis quanticae in hoc stat: orbitae electronicae (quae, initio, nonnisi circulares suppositae sunt) positae etiam sunt variari non modo continuo, sed per saltus; scilicet, admissae sunt tantum peculiares orbitae privilegiatae, definitis intervallis ab invicem separatae. Consequens est ut etiam status energetici electronum varientur per saltus, et non dentur nisi peculiares valores energetici $E_1, E_2 \ldots . E_n$ $\ldots\ldots$, definitis intervallis distincti. Quare etiam, si status energeticus atomi variatur (quia vel absorbet vel irradiat energiam), haec ipsa variatio energetica nequit fieri modo continuo, sed per saltus, seu per « quanta » energiae, quorum mensurae ε aequant discrimina inter binos gradus energeticos E_m, E_n inter quos evolvitur status physicus atomi:

$$\varepsilon_{n\to m} = E_n - E_m$$

Tandem frequentia radiationis emissae, iuxta relationem fundamentalem Planck ($\nu = \varepsilon/h$), est:

$$\nu_{n\to m} = \frac{E_n - E_m}{h}$$

Hoc ultimum consectarium theoriae experimentis comprobari potest: spectroscopia enim, analysi subiciens radiationes variorum elementorum, distinguit et mensurat varias frequentias componentes. Iamvero, ab initio, mira congruentia inter frequentias theoreticas et frequentias empirice compertas magnum creditum comparavit toti theoriae.

Pristinum vero exemplar atomi, complectens solas orbitas circulares, sufficiens non erat ut constituerentur tot distincti saltus energetici quot frequentiae reapse distinguebantur. Ad aptandam igitur theoriam factis, praeter orbitas circulares introductae sunt etiam orbitae ellipticae, varia eccentricitate praeditae ; insuper omnes orbitae, sive circulares sive ellipticae, suppositae sunt non iacere omnes in uno eodemque plano, sed exhibere varias inclinationes. Haec nova adiuncta addebant novos distinctos gradus energeticos, et consequenter sinebant novos saltus energeticos et productionem novarum frequentiarum radiationum. Consueta condicio quantica, postulans gradus energeticos per saltus distinctos, postulabat etiam sive eccentricitates ellipsium sive inclinationes orbitarum variari non iam modo continuo, sed per definitos saltus.

Tandem hypothesis de « electrone rotante » complevit tale systema atomicum : singula electrona supposita sunt rotari circa suum axem, parallelum axi orbitae ; etiam haec adiuncta inferunt novos gradus energeticos et novas frequentias radiationum, quae reapse empirice compertae erant.

Haec vero constructio theoretica, quamvis plurimum contulerit ad progressum scientiae de structura atomorum, tamen comprobata est non congruere cum experimentis : nec agebatur de incongruentiis, quae emendari possent adiectione cuiusdam novae hypothesis, sed de incongruentia inter facta empirica et ipsam rationem qua systema atomicum conceptum erat.

Ob hanc causam denuo invaluerunt obiectiones contra compromissa illa, quae artificiose, et non sine internis contradictionibus, copulaverant principia inter se pugnantia, classica scilicet et anticlassica. Quae crisis eo instantius novas solutiones postulabat, quatenus ipsa hypothesis Planck, ad analogam crisim adduxerat etiam theorias de natura energiae radiantis et nominatim de natura lucis : admittendi enim erant duo aspectus antithetici radiationum, alter undulatorius alter granularis, quorum synthesis verum aenigma erat.

* * *

Recentiores theoriae, quantisticae denominatae, quarum praecipui auctores fuerunt Heisenberg et Schrödinger, novas solutiones protulerunt, quae simul solvunt tum problema de structura atomorum, tum problema de natura lucis.

Notandae sunt duae notae characteristicae utriusque solutionis, quae nova problemata posuerunt.

Eminet in primis earum nota formalis : nova enim systemata exhiberi possunt tamquam mira instrumenta mathematica, aptissima quidem ad computanda elementa quae experimentis contrectamus, sed quae non patefaciunt internam structuram rerum et phaenomenorum.

Insuper notanda est peculiaris indoles statistica novae physicae, quae, nova de causa, distinguit physicam quanticam a physica classica.

Physica classica consueverat describere phaenomena aequationibus omnino determinatis, quae determinatis nexibus referunt ad invicem antecedentes et subsequentes status cuiusdam definiti systematis ; haec autem methodus, etsi eximiis successibus iam coronata, impar tandem fuit ad describendas microstructuras sive atomorum sive radiationum. Physica quantistica ex contrario, seponendo structuram determinatam et determinantem aequationum classicarum, novas expressiones phaenomenorum produxit, quae egregie solvunt problemata ; nova vero descriptio phaenomenorum essentialiter statistica est : de evolutione singulorum systematum elementarium non enunciantur nisi merae probabilitates.

* * *

En igitur nonnullae quaestiones philosophicae, quae exagitantur occasione novae redactionis scientiae physicae.

Favetne nova scientia quantistica thesi neopositivismi, iuxta quam munus scientiae totum absolvitur in redigendis mathematicis relationibus inter facta empirica, ita ut a priori interdicatur quaelibet investigatio de interna structura rerum et phaenomenorum ?

Character formalis novae scientiae et defectus interpretationis physicae eius formularum hanc quaestionem ponunt.

Alia quaestio vertitur circa characterem essentialiter statisticum et mere probabilisticum physicae quantisticae. Undenam provenit necessitas huius indolis ? Num eius radix agnoscenda est in ipsa structura mundi physici, quae iam dicenda non sit obnoxia rigido determinismo ?

Haec quaestio generatim promiscue exhibetur sub duplici titulo « de determinismo vel non determinismo mundi physici » vel « de efficientia vel non efficientia principii causalitatis ». Ad examen propterea revocatur ipsum principium causalitatis, non sine aequivocatione verborum.

Novae etiam regulae logicae ut necessariae exhibentur ad praecavendos errores ; necnon nova quaedam metaphysica videtur passim propugnari, cuius gratia casus moderatur omnia phaenomena elementaria microscopica, ita ut ipse ordo macroscopicus partus sit eiusdem casus.

Ut hae quaestiones rite ponantur et solvantur praerequiruntur non paucae notitiae de his quae methodo scientifica comperta sunt.

* * *

In prima parte tractatus exponitur origo theoriae quanticae, et eius applicatio ad naturam lucis describendam. Theoria quantica de natura lucis absoluta non est sine dependentia a theoria quantica de structura materiae ; tamen eius expositio anteponitur quia simplicior est, et quia ex ipsa lucem mutuari poterimus ad facilius illustrandam alteram partem theoriae.

Altera pars tractationis agit in primis de illa evolutione physicae quanticae (quam semiclassicam diximus), quae tota versa est circa exactam definitionem exemplaris atomici mechanici, quod rationem redderet de factis empiricis, quae spectroscopia recensuerat.

Quamvis huiusmodi tentamina tandem seposita sint, eorum notitia praetermittenda non est, sive ut notentur plures cognitiones certae quae, non obstante defectu methodi, acquisitae sunt, sive ut declarentur subsequentes physicae quantisticae. Hae ipsae notitiae necessariae etiam sunt ad profundiorem cognitionem comparandam illius naturae corporeae, de qua agunt nonnullae investigationes philosophicae.

Tandem exponuntur recensiores physicae quantisticae, quantum satis est ut connexae quaestiones philosophicae rite ponantur et solvantur.

PARS PRIMA

De physica quantica et de natura radiationum

SECTIO I

DE HYPOTHESI FUNDAMENTALI PLANCK ET DE EIUS APPLICATIONIBUS PHAENOMENIS OPTICIS

CAPUT I

SPECTRUM CORPORIS NIGRI ET PROBLEMA DE EIUS INTERPRETATIONE THEORETICA

ARTICULUS I

Studia quae praecesserunt opus Planck

1. Commutatio energiae inter materiam et aetherem.

Scientia physica saeculi XIX duo superba aedificia, inter cetera, construxerat et consolidaverat : alterum de constitutione materiae, alterum de energia radianti. Nondum vero declaratus erat processus mutuationis energeticae inter hos duos sectores mundi physici : processus scilicet quo materia irradiat energiam sub forma radiationum electromagneticarum, et processus inversus quo has radiationes absorbet.

Huiusmodi commutatio energiae inter materiam et aetherem contingit, ex. gr., cum materia, satis calefacta, candescit. Haec autem irradiatio energiae peculiari nota distinguitur si materia candescens etiam capax est emittendi quaslibet radiationes, cuiuslibet frequentiae ; in his enim adiunctis, phaenomenon nullatenus pendet ex specifica natura corporis irradiantis ; quare refert ipsas generaliores condiciones processus irradiationis.

Investigationes de hac re initium habuerunt inde a dimidio saeculo XIX : Kirchhoff, Stefan, Wien, Boltzmann, Lummer et Pringsheim, Lord Rayleigh, Jeans, suam operam his studiis dederunt ; plures leges empiricas definierunt, et etiam aggressi sunt earum interpretationem theoreticam ; problema tamen sol-

vere non potuerunt applicando sola principia physicae classicae. Planck vero, postulando hypotheses omnino novas, arduum problema egregie solvit anno 1900; patefaciens autem inopinatum processum commutationis energeticae inter materiam et aetherem, viam etiam aperuit ad notiones innovandas sive de structura materiae, sive de natura energiae radiantis.

2. Fundamenta tractationis.

Praecipua capita physicae classicae, quibus haec studia innituntur, ea sunt quae respiciunt radiationes electromagneticas et principia thermodynamicae.

a. Theoria electromagnetica classica iam nobis exhibuerat aetherem et eius perturbationes undulatorias lineamentis nimis definitis, quae (ut nova inventa postulant) emendationibus et temperamentis indigent. Iure tamen, agentes de energia electromagnetica a materia irradiata, retinere possumus eius pristinam notionem, saltem prout significat peculiarissimam formam energiae progredientis per spatium sine ullo fulcimine materiae quae ponderari possit; licet etiam nobis uti eodem nomine « aetheris » ut significemus saltem spatium (proprietatibus physicis certe non destitutum) per quod energia « radians » propagatur velocitate lucis.

b. Primum principium thermodynamicae (de conservatione energiae) extendendum est etiam ad energiam radiantem, sicut peculiaria experimenta confirmant et postulant. Quare quaelibet materia, quae irradiat, hoc non efficit nisi impendendo quamdam suam praeviam energiam, quae multifaria esse potest: thermica, chimica, electrica, luminosa ...; nostrum vero problema non considerat nisi radiationes quarum origo est energia thermica; tales radiationes peculiari nota distinguuntur, quia producuntur modo constanti; ex ceteris vero fontibus profluunt effectus fluxi, quales sunt, ex. gr., luces in oxydatione phosphori, in fluorescentiis, in pluribus phaenomenis electricis. Radiationes electromagneticae, de quibus nos agimus, dicuntur etiam « thermicae », ut designetur earum origo.

3. Leges Kirchhoff et corpus nigrum.

a. Prima lex Kirchhoff et irradiatio integralis corporis nigri.

Prototypum exemplar radiationis thermicae habetur cum corpus irradians capax est emittendi quamlibet radiationem, cuiuslibet frequentiae, necnon quavis intensitate. Corpus huiusmodi, quod apte denominatur « irradiator integralis », illud ipsum est quod iam consuevit denominari « corpus nigrum »; etenim, ut Kirchhoff comprobavit inde ab anno 1850, vis emissiva corporum et eorum capacitas absorbendi radiationes sunt proprietates reciprocae, quia quodlibet corpus illas radiationes potest emittere, quas etiam absorbet (I lex Kirchhoff); quare « radiator integralis » est etiam « receptor integralis », et etiam « nigrum » est usquedum eius temperatura non satis extollitur.

Irradiatio corporis nigri fundamentalis est quia (ut mox explicabimus) suppeditat notitias magni momenti circa ipsum processum commutationis energiae inter materiam et aetherem; insuper ad ipsas radiationes corporis nigri referri possunt etiam radiationes ceterorum corporum (quorum vis absorbendi est tantum partialis), quia, pro quavis frequentia et pro quovis gradu temperaturae, intensitates radiationis corporis nigri et corporis non nigri se habent inter se sicut relativi coëfficientes absorptionis.*

b. Secunda lex Kirchhoff et singularis proprietas radiationum corporis nigri.

Relationes nuper indicatae constituunt 2.am legem Kirchhoff; ipsae colliguntur ex secundo principio thermodynamicae extenso etiam ad energiam radiantem; haec autem extensio

* Coëfficientes absorptionis sunt numeri, qui exprimunt illas portiones energiae incidentis, quas varia corpora absorbent. Pro quolibet corpore « nigro » absorptio est totalis in quibuslibet adiunctis; quare coëfficiens absorptionis est semper unitarius. Pro ceteris corporibus coëfficientes absorptionis semper minores sunt unitate, et generatim etiam varii sunt, pro uno eodemque corpore, prout variantur frequentiae radiationum, et etiam earum status polarizationis, et anguli incidentiae.

iure fit, prout postulant ipsa facta empirica : ex. gr., corpora, diversis temperaturis praedita, commutant inter se suam energiam etiam per vacuum, irradiando energiam electromagneticam ; semper autem calor sponte transit a corpore calidiori ad corpus minus calidum, usque ad aequalem distributionem temperaturae ; quod si semel aequilibrium thermicum statutum est, numquam sponte contingit ut ullum corpus magis quam cetera calefiat, insumendo energiam thermicam erogatam ab alio corpore.

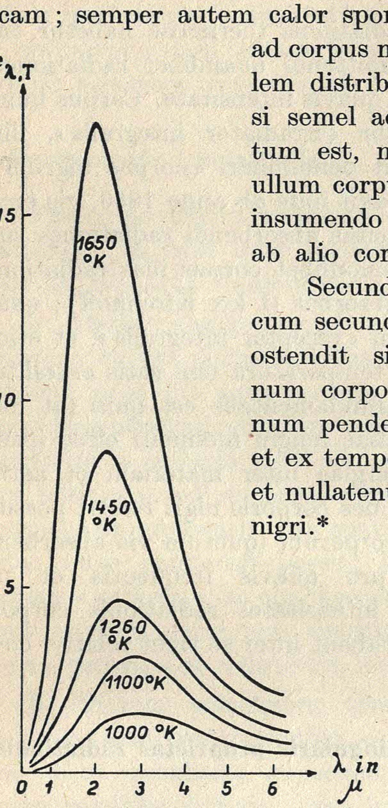


fig. 1

Secunda lex Kirchhoff (coniunctim cum secundo principio thermodynamicae) ostendit singulare privilegium radiationum corporis nigri : intensitas radiationum pendet unice ex earum frequentia ν et ex temperatura T corporis irradiantis, et nullatenus ex peculiari natura corporis nigri.*

4. Spectrum corporis nigri

Proprietas characteristica radiationum corporis nigri haec est : energia irradiata non pari ratione distribuitur inter varias frequentias ; sed, pro unoquoque gradu temperaturae, exstat definita frequentia, cui competit maxima intensitas radiationis ; frequentiis altioribus et inferioribus pertinent intensitates minores, quae decrescunt modo continuo, prout graphice repraesentat fig. 1.

* Pendet etiam, si irradiatio non fit per vacuum, ex natura medii; sed ob hanc causam intensitates omnium radiationum uniformiter imminuuntur pro potentia secunda indicis refractionis medii ; quare, etiamsi phaenomenon non producatur per vacuum, facile est repetere radiationes characteristicas corporis nigri per vacuum, quarum intensitates sunt functiones solius temperaturae T corporis irradiantis, et frequentiae ν radiationum.

Haec inaequalis partitio energiae inter varias frequentias irradiatas denominatur « spectrum corporis nigri ».

Ut iam innuimus, lex, quae definit talem partitionem energiae, maximi momenti est ; cum enim non pendeat ex specifica natura corporis nigri, exprimit generaliores condiciones quae moderantur ipsam commutationem energiae inter materiam et aetherem : corpus nigrum, ex se, sine differentia emittere potest quaslibet frequentias ; sed processus ipse emissionis postulat peculiarem illam distributionem energiae.

5. Problema solvendum.

Theorica interpretatio afferenda est de peculiari forma spectri corporis nigri. Hoc problema duas quaestiones complectitur :

a. Definienda est relatio analytica, quae refert variam vim emissivam **e** corporis nigri ad varias frequentias ν irradiatas et ad gradum T temperaturae. Aliis verbis, definienda est peculiaris illa functio mathematica $\mathbf{e}_{\nu T} = f(\nu T)$, vi cuius ex cognitis binis valoribus parametrorum ν et T, colligitur relativa vis emissiva $\mathbf{e}_{\nu T}$.*

b. Interpretatio physica afferenda est de dicta lege analytica, quae refert ad invicem $\mathbf{e}_{\nu T}$, ν, T : definienda scilicet est natura phaenomeni, vi cuius stat illa peculiaris relatio.

Planck utramque quaestionem solvit, introducendo unam hypothesim de irradiatione energiae per quanta ; pluribus vero notitiis usus est, quas eximii physici iam comparaverant, et quas sequenti paragrapho paucis innuimus.

* Ipsa lex aequipollenti ratione referri potest sive ad frequentias ν radiationum, sive ad earum longitudines undarum λ. Planck, agens de hac re, descriptiones phaenomenorum retulit ad frequentias radiationum ; praecedentia studia vero consideraverant directe longitudines undarum. Facile vero fit transitus ab una ad alteram expressionem, cum inter duo parametra stet definita et simplex relatio $\lambda = c/\nu$.

6. Nonnullae notitiae de radiatione nigra, ante opus Planck acquisitae.

a. Empirica definitio spectri corporis nigri: $\mathbf{e}_{\nu T} = f(\nu, T)$.

Ad empirice definiendum spectrum corporis nigri, Lummer et Pringhsheim, inde ab anno 1889, perfecerant plurimas et accuratissimas mensuras circa fluxus energiae, quos corpus nigrum irradiat. Hi fluxus varia intensitate pollent sive pro varia temperatura T, sive (invariata manente temperatura) pro variis frequentiis ν radiationum. Iamvero hae ipsae variae intensitates radiationum exprimunt illas varias « capacitates emissivas » $(\mathbf{e}_{\nu T})$ quae componunt spectrum corporis nigri (cfr. n. 4 et fig. 1).

b. « Intensitates specificae » $(\mathbf{i}_{\nu T})$ radiationis nigrae.

Mensurae empiricae non perpendunt directe fluxus energeticos, qui ex superficie (unitaria) corporis nigri irradiantur in omnes sensus in semispatium, et qui explent capacitates emissivas $(\mathbf{e}_{\nu T})$ corporis nigri; sed, propter practicas necessitates experimentorum, directe mensurantur subtilissimi fluxus energetici emissi in unam definitam directionem (orthogonalem superficiei irradianti).

Aestimantur variae « intensitates specificae » $(\mathbf{i}_{\nu T})$, quae competunt his partialibus fluxibus energeticis pro variis temperaturis T et pro variis frequentiis ν; statim autem colliguntur « capacitates specificae » $(\mathbf{e}_{\nu T})$, quia inter duas series valorum stat simplex relatio:

$$\mathbf{e}_{\nu T} = \pi \cdot \mathbf{i}_{\nu T}$$

c. « Densitates specificae » $(\mathbf{u}_{\nu T})$ radiationis nigrae in spatio clauso, in aequilibrio thermodynamico.

Si radiationes characteristicae corporis nigri excitantur intra corpus cavum et clausum, cuius status thermicus servet constantem temperaturam T, spatium internum huius furni repletur radiationibus, quae progrediuntur in omnes sensus et quae, impingentes in parietes furni, continuo reflectuntur.

Dicitur « densitas integralis » $(\mathbf{U}_{\nu T})$ radiationum proportio inter energiam irradiatam (complectens radiationes cuiuslibet frequentiae) et volumen quod ipsa energia replet; seu, quod ad idem redit, est quantitas energiae contenta in volumine unitario.

Dicuntur vero « densitates specificae » $(\mathbf{u}_{\nu T})$ eae partiales densitates, quae ipsis radiationibus competunt pro variis frequentiis ν.

Valores « densitatum specificarum » $(\mathbf{u}_{\nu T})$ colliguntur indirecte, ex relatione qua referuntur ad « intensitates specificas » $(\mathbf{i}_{\nu T})$:

$$\mathbf{u}_{\nu T} = \frac{8\pi}{c}\,\mathbf{i}_{\nu T} \qquad [c = \text{veloc. lucis}]$$

d. Nonnullae leges de radiatione nigra: Lex Stefan - Leges Wien,

Mensurae empiricae circa radiationes corporis nigri resumuntur nonnullis legibus, quae exprimunt peculiares relationes inter temperaturam T et summam energiae irradiatae; vel inter varias temperaturas et illas frequentias, quibus competunt (pro variis temperaturis) maximae capacitates emissivae.

Agitur de legibus experimentis confirmatis; quare recta interpretatio phaenomeni debet his ipsis legibus obtemperare.

e. Nonnulla tentamina producendi interpretationes theoricas spectri corporis nigri.

Rayleigh, Jeans, Wien hoc opus aggressi sunt applicando principia classica, et nominatim illud principium « aequipartitionis energiae » quod colligitur ex generalioribus principiis classicis. Sed tales methodi non produxerunt nisi solutiones partiales, quae etiam involvebant (ut ipse Plank melius in lucem tulit) quasdam conclusiones absurdas, vel saltem non obtemperantes cuidam peculiari condicioni.

Hi insuccessus argumentum praebuerunt ut Planck seponeret principia classica, et novam hypothesim conderet anticlassicam. Ut significatio et necessitas huius hypothesis rite

declarari possint, ipsae notitiae, quae in praesenti paragrapho paucis indicatae sunt, latius et magis accurate exponuntur in sequenti articulo.

Articulus II

Elementa, empirica et theorica, quibus usus est Planck ad problema solvendum *

7. Spectrum corporis nigri empirice definitum (cfr. 6, a).

Interpretatio theorica spectri corporis nigri postulat praeviam definitionem empiricam ipsius spectri : exacte mensurandae sunt variae « capacitates emissivae specificae » ($\mathbf{e}_{\nu T}$) corporis nigri.

Cum non dentur corpora perfecte nigra, experimenta vertuntur circa radiationes aequipollentes, quae arte producuntur.

Ea ipsa ratiocinia quae, innixa principiis thermodynamicae, colligunt 2.am legem Kirchhoff et singulares proprietates radiationis nigrae, etiam ostendunt parem radiationem produci in spatio interno peculiaris furni, qui constituatur corpore cavo, opaco, clauso ; requiritur etiam temperatura constans furni, seu aequilibrium thermodynamicum ; huic vero condicioni obtemperatur si furnus mergitur in thermostato. In his adiunctis furnus repletur radiatione nigra (fig. 2).

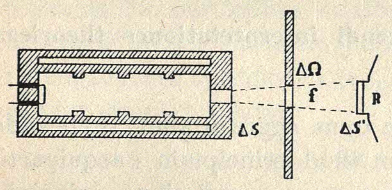


fig. 2

Ut talis radiatio conspici et mensurari possit, parietes furni perforantur parvo fora-

* Hic articulus, qui magis evolvit ipsas notitias notatas sub n. 6 articuli praecedentis, requiritur ad plenius declarandas nonnullas quaestiones.

In reliqua tractatione exponentur in notis eae declarationes, quae postulant generalem notitiam totius articuli. Si non requiritur nisi notitia quarumdam peculiarium paragraphorum, hae singillatim indicabuntur.

mine, quod non immutat internam radiationem. Omnes radiationes, quae per foramen ingrediuntur in furnum, ex toto absorbentur (saltem post nonnullas reflexiones) ita ut superficies foraminis vere vices gerat corporis nigri ; minima pars energiae, quae per foramen egreditur, negligi potest, et etiam illico compensatur propter actionem thermostati.

Variae « intensitates specificae » ($\mathbf{i}_{\nu T}$) radiationum egredientium ex furno mensurantur iuxta methodum expositam in sequenti paragrapho. Ipsae autem « intensitates specificae », multiplicatae per π (prout demonstrant leges Lambert de mensuris energeticis radiationum) exprimunt « capacitates emissivas specificas » ($\mathbf{e}_{\nu T}$) quae componunt spectrum radiationis nigrae (cfr. fig. 1) ; scilicet :

$$\mathbf{e}_{\nu T} = \pi \cdot \mathbf{i}_{\nu T} \quad \text{vel} \quad \mathbf{e}_{\lambda T} = \pi \cdot \mathbf{i}_{\lambda T}$$

8. Methodus ad mensurandas « intensitates specificas »

Haec methodus in lucem fert exactas significationes physicas sive intensitatum $\mathbf{i}_{\nu T}$, sive capacitatum $\mathbf{e}_{\nu T}$.

Ex furno in aequilibrio thermodynamico, pleno radiatione nigra, per foramen ΔS hauritur fasciculus f radiationum (fig. 2). Forma fasciculi sit conica, et $\Delta\Omega$ denotet angulum solidum huius coni. Apparatus receptor « integralis » R (aptus scilicet ad absorbendas omnes radiationes, cuiuslibet frequentiae) absorbet et dimetitur energiam fasciculi f ; superficies absorbens $\Delta S'$ apparatus receptoris determinat angulum solidum $\Delta\Omega$ fasciculi f.

Superficies ΔS irradians et angulus $\Delta\Omega$ fasciculi radiationum satis delimitentur ut radiationes censeri possint uniformi intensitate praeditae per totam extensionem sive superficiei irradiantis, sive anguli irradiationis.

Fasciculus f constat omnibus radiationibus, cuiuslibet frequentiae ; quare eius intensitas $\mathbf{I}_T$ dicitur « intensitas integralis » radiationis nigrae. Ad definiendum vero spectrum corporis nigri, seiunctim mensurandae sunt variae « intensitates specificae » $\mathbf{i}_{\nu T}$, quae competunt radiationibus pro variis frequentiis ν.

Ad hunc finem interponuntur,inter superficiem irradiantem ΔS et superficiem absorbentem $\Delta S'$, instrumenta optica per quae non transeant nisi radiationes quarum frequentiae contineantur inter duas frequentias extremas ν et $\nu + \Delta\nu$, quae satis proximae sint ut radiationes censeri possint uniformi intensitate praeditae per totum intervallum $\Delta\nu$.

Directe mensurantur variae portiones energiae $\Delta w_{\nu T}$ quas transvehunt varii fasciculi specifici $f\,(\nu,\ \nu + \Delta\nu)$; hae quantitates energiae proportionem directam habent cum extensione ΔS superficiei irradiantis, cum extensione $\Delta\Omega$ anguli irradiationis, cum duratione Δt ipsius irradiationis, et tandem cum intervallo $\Delta\nu$ frequentiarum; huiusmodi proportio vero varia est pro variis frequentiis ν, iuxta coëfficientem $\mathbf{i}_{\nu T}$, qui indicat varias intensitates radiationum pro variis frequentiis ν; scribenda igitur est aequalitas:

$$\Delta w_{\nu T} = \mathbf{i}_{\nu T} \cdot \Delta S \cdot \Delta\Omega \cdot \Delta t \cdot \Delta\nu$$

scilicet:

$$\mathbf{i}_{\nu T} = \frac{\Delta w_{\nu T}}{\Delta S \cdot \Delta\Omega \cdot \Delta t \cdot \Delta\nu}$$

vel:

$$\mathbf{i}_{\nu T} = \frac{\Delta\varphi_{\nu T}}{\Delta\nu}$$

in qua ultima formula unum symbolum $\Delta\varphi_{\nu T}$ denotat definitos « fluxus energiae »* emissos a superficie ΔS unitaria, et qui repleant (densitate uniformi) angulum $\Delta\Omega$ unitarium.

Hae expressiones « intensitatis specificae » ostendunt etiam eius naturam physicam; scilicet:

$$\mathbf{i}_{\nu T} = \frac{\text{energia}}{\text{superficies} \times \text{tempus} \times \text{frequentia}} \quad **$$

$$= \frac{\text{fluxus energiae}}{\text{superficies} \times \text{frequentia}}$$

---

* Dicitur « fluxus energiae » quantitas energiae uniformiter emissa per tempus unitarium; seu $\Delta w_{\nu T}/\Delta t$.

** Angulus $\Delta\Omega$ inclusus non est in formula, quia mensurae angulo-

Eiusdem naturae sunt etiam « capacitates emissivae specificae » $\mathbf{e}_{\nu T}$ definientes spectrum corporis nigri.

9. Repraesentatio graphica functionis $\mathbf{i}_{\nu T}$.

Cum $\mathbf{i}_{\nu T}$ et $\mathbf{e}_{\nu T}$ sint magnitudines homogeneae, necnon proportionales, repraesentatio graphica intensitatis specificae $\mathbf{i}_{\nu T}$ eiusdem typi est ac repraesentatio graphica spectri corporis nigri (fig. 1). Quare analysis huius novae repraesentationis illustrat etiam significationem physicam prioris.

Expressio $\mathbf{i}_{\nu T} = \Delta\varphi_{\nu T} / \Delta\nu$ seu $\Delta\varphi_{\nu T} = \mathbf{i}_{\nu T} \cdot \Delta\nu$ exhibet tria elementa repraesentanda, quorum unum est productus ceterorum; quare ipsa elementa apte repraesentantur per aream et eius duo latera.

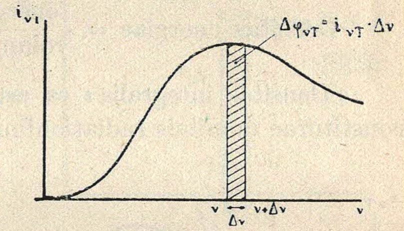


fig. 3

Adhibitis igitur axibus cartesianis orthogonalibus ν et $\mathbf{i}_{\nu T}$ (fig. 3), variis intervallis elementaribus $\Delta\nu$ apponantur totidem areae rectangulares, quarum extensiones referant relativos fluxus $\Delta\varphi_{(\nu,\ \nu + \Delta\nu)}$ experimentis collectos. Consequens est ut alterum latus rectanguli (sua ipsa altitudine) exprimat « intensitatem specificam » radiationum $(\mathbf{i}_{\nu T})$ pro ipso intervallo frequentiarum.

Collectio omnium fluxuum specificorum $\Delta\varphi_{\nu T}$ componit fluxum integralem energiae, qui propterea repraesentatur area curvilinea, quam circumscribunt axis ν et linea curva $\mathbf{i}_{\nu T} = f(\nu, T)$, quam omnes areae rectangulares elementares $\Delta\varphi_{\nu T}$ eo exactius definiunt quo subtiliores fiunt. *

---

rum sunt coëfficientes mere numerici, qui modificant mensuram sub aspectu quantitativo, sed non adiciunt ullum factorem physicum.

Hac ipsa de causa $\mathbf{e}_{\nu T}$ et $\mathbf{i}_{\nu T}$ sunt magnitudines physicae homogeneae, quia proportionem habent ad invicem, iuxta coëfficientem angularem π mere numericum.

* Singuli fluxus energetici, qui experimentis mensurantur, constituuntur pluribus radiationibus, quarum frequentiae aliquatenus variantur per quoddam intervallum $\Delta\nu$.

Haec condicio absolute necessaria est: non dantur enim instru-

Si temperatura extollitur, etiam hi fluxus energetici copiosiores fiunt, et repraesentantur areis magis extensis (fig. 4).

Eadem autem est significatio physica diagrammatis spectri corporis nigri.

10. « Densitas specifica » radiationum ($\mathbf{u}_{\nu T}$) (cfr. 6, c).

Agitur de radiatione nigra replente spatium clausum in aequilibrio thermodynamico. Eius densitas aestimatur ex quantitate energiae contenta in volumine unitario, seu ex proportione inter definitam quantitatem energiae et volumen quod ipsa energia replet; scilicet:

$$\text{Densitas energiae} = \frac{\text{energia}}{\text{volumen}} = \frac{\Delta W_T}{\Delta V} = \mathbf{U}_T$$

« Densitas integralis » ea est quae competit toti energiae, constitutae omnibus radiationibus, cuiuslibet frequentiae; haec densitas energiae varia est pro varia temperatura T; eam designavimus annotatione $\mathbf{U}_T$.

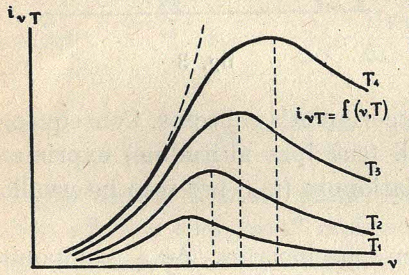


fig. 4

« Densitas specifica » radiationum refert proportionem, qua partiales radiationes (inter intervallum frequentiarum $\nu, \nu + \Delta\nu$) concurrunt ad componendam densitatem integralem; iamvero portio energiae $\Delta w_{\nu T}$, relativa intervallo

menta optica, quae sinant solum transitum unius indivisibilis frequentiae; neque dantur apparatus receptores, qui mensurent energiam non nullam respondentem uni indivisibili frequentiae. Ceterum, si haec darentur, absurdum sequeretur: scilicet, fluxus integralis energiae fieret infinitus, quia constaret infinitis fluxibus specificis non nullis (infinitae enim frequentiae distingui possunt per totum campum frequentiatum, sicut infinita puncta distingui possunt in linea continua).

Hae animadversiones ostendunt mensuras empiricas directe suppeditare valores medios intensitatum $\mathbf{i}_{\nu T}$ per varia intervalla $\Delta\nu$. Tamen, si mensurae multiplicantur et satis minutae fiunt, bene definiri potest linea curva continua $\mathbf{i}_{\nu T} = f(\nu, T)$. Idem dicendum est de functione $\mathbf{e}_{\nu T} = f(\nu, T)$.

$\nu, \nu + \Delta\nu$, proportionem habet cum intervallo frequentiarum $\Delta\nu$, iuxta factorem $\mathbf{u}_{\nu T}$, qui refert variam « densitatem specificam » radiationum, pro variis frequentiis ν (fig. 5).*

Quare colligimus:

$$\mathbf{u}_{\nu T} = \frac{\Delta w_{\nu T}}{\Delta\nu}$$

$$= \frac{\text{energia}}{\text{volumen} \times \text{frequentia}}$$

Notanda est relatio inter « densitatem specificam » $\mathbf{u}_{\nu T}$ et « intensitatem specificam » $\mathbf{i}_{\nu T}$ radiationum.

Intensitas specifica respicit fluxum energeticum subtilissimum, in unam definitam directionem progredientem. Densitas vero specifica respicit collectionem radiationum progredientium in omnes directiones et sensus.

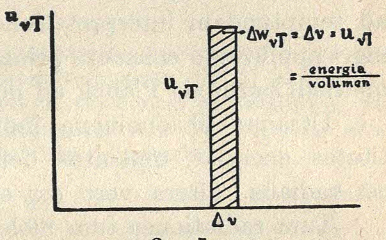


fig. 5

Intensitas specifica respondet quantitati energiae quae irradiatur per intervallum unitarium temporis; et quae propterea, in uno definito momento temporis, extenditur per spatium c quod lux percurrit per intervallum unitarium temporis. Densitas vero specifica refertur ad energiam, quae in definito momento temporis continetur intra volumen unitarium.

Si dictae relationes mathematice exprimuntur, colligitur sequens aequalitas:

$$\mathbf{u}_{\nu T} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{i}_{\nu T} \qquad [c = \text{veloc. lucis}]$$

$$(\mathbf{u}_{\nu T})_{\text{nat.}} = \frac{4\pi}{c}\,(\mathbf{i}_{\nu T})_{\text{nat.}}$$

$$= \frac{8\pi}{c}\,(\mathbf{i}_{\nu T})_{\text{pol.}}\,^{**}$$

* Cfr. analogam significationem intensitatis specificae $\mathbf{i}_{\nu T}$; v. n. 9.

** Mensurae perfici possunt adhibendo radiationes polarizatas vel

Patet homogeneitas physica duorum membrorum aequalitatis :

$$\frac{\text{energia}}{\text{vol.} \times \text{freq.}} = \frac{\text{tempus}}{\text{spatium lineare}} \times \frac{\text{energia}}{\text{superf.} \times \text{tempus} \times \text{freq.}}$$

$$= \frac{\text{energia}}{\text{volumen} \times \text{frequentia}}$$

11. Analogia inter radiationem nigram intra volumen clausum et agitationem thermicam aëriformium in definitio volumine.

Haec analogia nobis notanda est quia criteria suggessit ad temptandam interpretationem theoreticam spectri corporis nigri applicando consueta principia classica ; insuccessus autem methodi perduxit Planck ad novam hypothesim producendam.

Utraque phaenomena indicata exhibent quasdam quantitates energiae replentes definita volumina : altera energia est radians ; altera vero est energia cinetica molecularum.

Tum radiationes tum moleculae cahotice progrediuntur in omnes directiones et sensus ; quae similitudo magis perspicua fit si radiationes concipiuntur constitutae granulis energiae. Utraque energia habet originem thermicam, et elevatur una cum temperatura.

Speciatim nobis consideranda est interna compositio harum energiarum : utraque constat ex pluribus energiis partialibus, specifice distinctis, quae diversis rationibus concurrunt ad componendam energiam totalem.

Si agitur de radiatione nigra, varia densitas energiae nectitur cum variis capacitatibus emissivis specificis $\mathbf{e}_{\nu T}$. Si agitur de agitatione thermica molecularum, varia densitas energiae nectitur cum variis valoribus $n_i \cdot \frac{1}{2} m \cdot v^2{}_i$, qui exprimunt varias copias energiarum, pro tot distinctis velocitatibus (mediis) molecularum ($\frac{1}{2} m v^2{}_i$ exprimit energiam cineticam [mediam] quam possident n_i moleculae, quarum velocitates proxime accedunt ad velocitatem v_i).

---

non polarizatas, seu naturales ; relatio autem inter duas mensuras est : $(\mathbf{i}_{\nu T})_{\text{nat.}} = 2\,(\mathbf{i}_{\nu T})_{\text{pol.}}$

Si hae variae densitates energeticae repraesentantur graphicae, colliguntur analoga diagrammata, ad instar campanae.

Si de radiatione nigra agitur, diagramma exhibet peculiarem frequentiam (variam pro varia temperatura), cui competit maxima capacitas emissiva specifica, et circa quam producitur maxima densitas energiae. Si agitur de agitatione molecularum, diagramma energeticum exhibet peculiarem velocitatem (variam pro varia temperatura), circa quam producitur maxima densitas energiae, quia productus (medius) $n_i \cdot \frac{1}{2} m\, v^2{}_i$ attingit maximum valorem.*

---

* Diagramma de distributione energiae in phaenomeno agitationis molecularis facile colligitur ex diagrammate analogo (fig. 6) quod exprimit legem statisticam Maxwell de maiori vel minori probabilitate, qua variae velocitates possibiles v_i distribuuntur inter N moleculas eiusdem massae aëriformis in aequilibrio thermodynamico.

Maior vel minor « probabilitas specifica » cuiusdam peculiaris velocitatis v_i aestimatur a maiori vel minori proportione n_i/N (seu a maiori vel minori probabilitate $\Delta \Pi_i$), qua n_i moleculae acquirunt (in uno eodemque momento) velocitates contentas inter v_i et $v_i + \Delta v$.

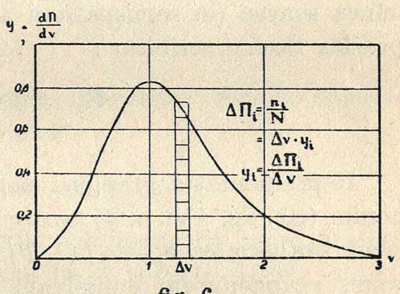


fig. 6

Quare, si in diagrammate apponuntur variis intervallis velocitatum Δv totidem areae rectangulares, quae, suis variis extensionibus, repraesentent dictas varias proportiones (seu probabilitates) $\Delta\Pi_i = n_i/N$ altitudo earumdem arearum ($y_i = d\Pi_i/dv$) exprimit « probabilitatem specificam » quae competit velocitati v_i.

Ex hoc ipso diagrammate colliguntur ambo factores (n_i et $\frac{1}{2} m\, v^2{}_i$) quibus constituitur diagramma de varia densitate energetica pro variis velocitatibus. Forma autem huius diagrammatis est et ipsa ad instar campanae, sicut diagramma figurae 6.

Notandum. Maxwell collegit suam legem statisticam supponendo energiam dividi inter moleculas iuxta classicum principium aequipartitionis energiae. Ipsa lex statistica experimentis comprobata est : experimenta directe perpendunt varias velocitates molecularum ; sed indirecte comprobant ipsam distributionem energiae reapse obtemperare principio aequipartitionis.

12. Nonnullae leges de radiatione nigra. (cfr. 6, d).

a. Lex Stefan-Boltzmann.

Haec lex respicit fluxus energeticos « integrales », qui componuntur radiationibus cuiuslibet frequentiae (cfr. nn. 7, 8).
Ipsi fluxus energetici aestimantur ex quantitate energiae, quam corpus nigrum irradiat per superficiem unitariam, et per intervallum unitarium temporis.
Si consideratur densitas huius energiae respectu subtilis anguli solidi $\Delta\Omega$, iuxta directionem orthogonalem superficiei irradianti, colligitur ea quae denominata est « intensitas integralis » radiationum $\mathbf{I}_T$. Lex autem Stefan, empirice collecta, scribit sequentem aequalitatem :

$$\mathbf{I}_T = a \cdot T^4 \qquad [a = \text{const.}]$$

Si consideratur tota « capacitas emissiva integralis » corporis nigri $\mathbf{E}_T$, quae respicit fluxus energeticos irradiatos in omnes sensus (in semispatium adiacens superficiei irradianti), ipsa lex Stefan scribitur :

$$\mathbf{E}_T = a \cdot \pi \cdot T^4$$
$$= \sigma \cdot T^4 \qquad [\sigma = a \cdot \pi = \text{const.}]$$

Repraesentatio graphica perspicue exprimit hanc legem : etenim (cfr. fig. 1 et n. 4) area curvilinea, quam delimitat linea curva isothermica $\mathbf{e}_{\lambda T} = f(\lambda, T)$, repraesentat, sua ipsa extensione, « capacitatem emissivam integralem » $\mathbf{E}_T$; quo altior fit temperatura eo magis extenditur talis area, iuxta ipsam legem Stefan.
Boltzmann theorice collegit hanc ipsam legem ex principiis thermodynamicae. Tamen coëfficiens σ nonnisi empirice determinari potest.

b. Leges Wien.

1.a Lex. Longitudo undae λ_{max}, cui respondet maxima vis emissiva $\mathbf{e}_{\nu T}$ (cfr. fig. 1), inversa ratione variatur quam temperatura T ; stat propterea aequalitas :

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{const.}$$

Si mensurae referuntur ad frequentias ν, quae inversa ratione variantur respectu λ, ipsa lex dicit temperaturam T et ν_{max} augeri fixa proportione :

$$\frac{T}{\nu_{max.}} = \text{const.}$$

2.a Lex. Vis emissiva maxima fixa ratione crescit (si de emissione polarizata agitur) cum potentia quinta temperaturae :

$$(\mathbf{e}_{max.})_{pol.} = \text{const.} \cdot T^5$$

Considerationes theoricae colligunt ex his legibus nonnullas alias relationes ; nominatim colligunt quoddam lineamentum illius functionis $\mathbf{e}_{\lambda T} = f(\lambda, T)$, quae exprimere debet distributionem energiae in spectro corporis nigri (cfr. fig. 1) ; haec functio debet esse sequentis typi generalis :

$$\mathbf{e}_{\lambda T} = \frac{1}{\lambda^5} \cdot F(\lambda \cdot T)$$

determinanda propterea manet peculiaris forma tribuenda functioni F producti $\lambda \cdot T$.

c. Lex Lummer-Pringsheim (cfr. nn. 6, a; 7).

Ea lex est, quae colligitur ex mensuris mere empiricis capacitatis emissivae specificae ($\mathbf{e}_{\lambda T}$) corporis nigri ; nota repraesentatio graphica (fig. 1) has mensuras empiricas resumit. Determinanda manet apta functio analytica quae hos valores empiricos ad synthesim revocet.

Notandum.

Omnes et singulae leges recensitae empirice definitae sunt; quare exprimunt tot condiciones, quibus necessario obtemperare debet recta interpretatio theoretica spectri corporis nigri.
Leges Wien et earum consectaria praestant etiam nonnulla subsidia ad investigandam functionem analyticam, quae apte describat spectrum empirice compertum.

13. Nonnulla tentamina interpretandi spectrum corporis nigri solo subsidio principiorum classicorum.

a. Sola principia generalia thermodynamicae et electromagnetismi non alias conclusiones sinunt praeter leges Stefan et Wien ; ut investigatio ultra procedere possit, quaedam peculiares hypotheses addendae sunt circa naturam et proprietates illorum systematum materialium elementarium, quae emittunt radiationem nigram. Radiatio nigra non pendet ex specifica natura corporis nigri ; quare hypotheses quae requiruntur solum respiciunt communem capacitatem irradiandi energiam sub qualibet frequentia.

b. Rayleigh et Jeans, applicando notiones classicas de undis electromagneticis et de earum causis, supposuerunt elementa materialia irradiantia esse tot systemata oscillantia, quorum frequentia oscillationis congrueret cum frequentia radiationis emissae ; partitionem autem energiae inter hos oscillatores elementares talem censuerunt quae obtemperaret principio aequipartitionis energiae.

Hoc principium aptum se exhibebat ad definiendam etiam portionem energiae tribuendam singulis oscillatoribus elementaribus pro unoquoque gradu libertatis systematis. Quod perspicue apparet si consideratur phaenomenon mixtum, vi cuius, intra unum idemque involucrum, producatur sive radiatio nigra sive agitatio thermica aëriformium : aequilibrio thermodynamico supposito, energia (media) quae competit singulis moleculis aëriformium est $\frac{1}{2} \cdot k \cdot T$ pro unoquoque gradu libertatis (k designat notum coëfficientem constantem Boltzman) ; principium autem aequipartitionis energiae postulat ut eadem portio competat etiam oscillatoribus elementaribus irradiantibus energiam.

Applicando haec criteria Rayleigh et Jeans collegerunt legem, quae (sub aspectu quantitativo) satis congruit cum spectro corporis nigri pro inferioribus frequentiis vel pro altioribus temperaturis (quoties scilicet satis parvus est valor ν/T), sed quae omnino discrepat in ceteris adiunctis ; immo ducit ad conclusiones absurdas, postulantes copias energiae in infinitum crescentes pro crescentibus valoribus ν/T.

c. Wien, pariter retinendo et applicando principium aequipartitionis energiae, solutionem problematis repetiit ex analogia inter phaenomenon radiationis nigrae et phaenomenon agitationis thermicae aëriformium (cfr. n. 11).

In hoc altero phaenomeno energia distribuitur inter moleculas iuxta classicum principium aequipartitionis ; nihilominus ipsa energia non pari densitate producitur pro variis velocitatibus, quia ipsae variae velocitates non pari probabilitate (seu densitate) producuntur.

Quidni admittatur analoga explicatio de distributione energiae in spectro corporis nigri ? Hanc explicationem suggerit ipsa analoga forma (ad instar campanae) duorum diagrammatum de distributione energetica.

Iuxta hanc hypothesim, energia supponitur distribui inter oscillatores elementares ad normam eiusdem principii classici aequipartitionis ; nihilominus energia non pari densitate irradiatur pro variis frequentiis, quia variae possibiles frequentiae oscillatorum elementarium non pari probabilitate (seu densitate) excitantur.

Huiusmodi explicatio implicite postulat peculiarem hypothesim physicam ; scilicet : oscillatores elementares irradiantes energiam supponuntur tendere ad acquirendam peculiarem frequentiam, quae variatur una cum temperatura iuxta legem Wien ; reapse vero ad illam frequentiam accedunt iuxta legem statisticam similem legi de distributione velocitatum in phaenomeno agitationis thermicae aëriformium.

Potestne haec hypothesis cum fundamento poni ? vel dantur argumenta in contrarium ? Huic questioni respondebit sequens articulus, exponendo novam solutionem problematis a Planck propositam, eius notam anticlassicam et eius necessitatem.

Lex, quam Wien collegit applicando dicta criteria, satis congruit cum spectro corporis nigri pro altis frequentiis vel pro inferioribus temperaturis (quoties scilicet altus est valor ν/T) ; sed quae componi nequit cum experimentis in ceteris adiunctis.

d. P. Gianfranceschi S. J., applicando eadem criteria generalia quibus Wien usus est, perfectiorem legem collegit,* quae, sub aspectu quantitativo, bene refert integrum spectrum corporis nigri ; nominatim egregie congruit, per integrum campum frequentiarum, cum distributione energiae in spectro radiationum solis.

Sub aspectu theorico, haec lex obtemperat omnibus condicionibus, quas postulant relationes inter « intensitates specificas » radiationum et « densitates specificas », necnon lex Stefan leges Wien et earum consectaria. Ad interpretationem vero theoricam quod attinet, quaerendum est (ut ipse auctor animadvertit) an dictae condiciones, quae necessariae sunt, etiam sufficientes dici possint. Nova autem analysis, quam Planck instituit (rite dein corroborata aptioribus argumentis) novam condicionem definivit, cui formula P. Gianfranceschi non obtemperat.

* « Memorie della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei », Vol. IX.
« Il Nuovo Cimento », Anno III, N. 6.

CAPUT II

SOLUTIO PROBLEMATIS A PLANCK PROPOSITA ET EIUS FOECUNDAE APPLICATIONES

ARTICULUS I

Hypothesis fundamentalis Planck ad interpretandum spectrum corporis nigri.

14. « Densitates specificae » radiationis nigrae et « energia specifica » media systematum elementarium irradiantium.

Studia circa spectrum corporis nigri, ante opus Planck peracta, iam definiverant plures condiciones empiricas et theoreticas, quibus obtemperare debebat recta solutio problematis. Planck autem in lucem tulit aliam relationem theoreticam, quae intercedit inter « densitates specificas » ($\mathbf{u}_{\nu T}$) radiationis nigrae (cfr. nn. 6, c ; 10) et « energiam specificam » mediam ($\overline{\mathbf{E}}_{\nu T}$) tribuendam singulis systematibus elementaribus, irradiantibus energiam sub frequentia ν.

Haec relatio speciatim notanda est quia fulcimen praebet ipsi hypothesi fundamentali Planck ; exprimitur autem sequenti aequalitate :

$$\mathbf{u}_{\nu T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot \overline{\mathbf{E}}_{\nu T} \; * \tag{1}$$

* Necessaria homogeneitas duorum membrorum aequalitatis illustrat eius significationem physicam ; iam scimus (cfr. n. 10) coëfficientibus $\mathbf{u}_{\nu T}$ competere sequentem significationem :

$$\mathbf{u}_{\nu T} = \frac{\text{energia}}{\text{volumen} \times \text{frequentia}} ;$$

eadem reapse est significatio physica alterius membri : colligimus enim

Haec condicio nova luce illustrat rectam solutionem problematis : nequit scilicet solutio esse ad normam principii aequipartitionis energiae. Etenim, iuxta hoc principium energia media singulorum systematum elementarium irradiantium definitur sequenti aequalitate :

$$\overline{\mathbf{E}}_{\nu T} = n \cdot k/2 \cdot T$$

— n denotat numerum graduum libertatis systematis ;

— k est notus coëfficiens constans Boltzmann, qui est ipse coëfficiens R aequationis characteristicae aëriformium, redactus ad ordinem molecularem ; R enim indicat quamdam energiam respondentem uni moleculae-grammati ; k vero, seu R/N, est energia respondens uni moleculae.

— T indicat gradus temperaturae absolutae.

Si vero in aequalitate (1) inseritur huiusmodi expressio energiae mediae, colligitur talis distributio energiae per varias frequentias, quae cum spectro corporis nigri non congruit, et quae insuper involvit conclusionem absurdam. Scribendum enim esset :

$$\mathbf{u}_{\nu T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot n \cdot \frac{k}{2} \cdot T$$

scilicet : densitas energiae (et similiter intensitas radiationum, et vis emissiva corporis nigri) continuo cresceret una cum potentia secunda frequentiae ; et in infinitum cresceret pro altissimis frequentiis.

Nova igitur hypothesis requirebatur circa naturam et proprietates systematum elementarium irradiantium energiam.

$$\frac{\nu^2}{c^3} \cdot \overline{\mathbf{E}} = \text{energia} \times \frac{\text{tempus}^3 \times \text{frequentia}^2}{\text{volumen}} = \frac{\text{energia}}{\text{volumen} \times \text{frequentia}}$$

Ex relatione tandem, quae intercedit inter « densitatem specificam » $\mathbf{u}_{\nu T}$ et « intensitatem specificam » $\mathbf{i}_{\nu T}$ ($\mathbf{u}_{\nu T} = 8\pi/c \cdot \mathbf{i}_{\nu T}$), colligimus :

$$\mathbf{i}_{\nu T} = \frac{\nu^2}{c^2} \overline{\mathbf{E}}_{\nu T} = \frac{\text{energia}}{\text{superficies}} ;$$

(cfr. n. 8) ; quae aequalitas nexum exprimit inter energiam mediam $\overline{\mathbf{E}}_{\nu T}$ theoretice computatam et intensitatem specificam $\mathbf{i}_{\nu T}$ quae subicitur confirmationi experimentorum.

Planck, retinendo generalem notionem systematum oscillantium, supposuit eorum status energeticos variari non posse modo continuo, sed per saltus, ita ut distinguerentur tot distincti status stationarii possibiles :

$$1 \cdot h\nu, \quad 2 \cdot h\nu \,.\,.\,.\,.\,.\, \quad n \cdot h\nu \,.\,.\,.\,.\,.$$

Coëfficienti h, qui (pro data frequentia ν) determinat saltus energeticos, competit significatio physica « actionis » (seu energiae divisae per frequentiam, vel multiplicatae per tempus) ; ipsi coëfficienti h tribuitur valor constans universalis (pro omnibus frequentiis).

Consequens est ut variae possibiles variationes energeticae internae horum systematum non fiant nisi per emissiones (vel absorptiones) granulorum energeticorum, quorum mensura est $h \cdot \nu$, vel multipla integra eiusdem quantitatis : $n \cdot h\nu$.

Huiusmodi hypothesis implicite postulat energiam non distribui inter systemata elementaria iuxta principium aequipartitionis. Definienda autem erat nova expressio energiae mediae $\overline{\mathbf{E}}_{\nu T}$, quae competit dictis systematibus elementaribus.

15. Lex Planck de spectro corporis nigri.

Ad definiendam energiam mediam $\overline{\mathbf{E}}_{\nu T}$ tribuendam singulis systematibus elementaribus nonnulla elementa praesto erant :

— condicio aequilibrii thermodynamici, quae requiritur ut producantur radiationes propriae corporis nigri intra involucrum clausum ;

— nonnullae conclusiones, quas Boltzmann et Gibbs collegerant circa ipsum regimen aequilibrii thermodynamici statistici ;

— regulae calculi probabilitatum.

Planck, utens his subsidiis, collegit :

$$\mathbf{E}_{\nu T} = \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - 1} \; * \qquad (2)$$

* Alterum membrum aequalitatis (2) reapse exprimit quamdam energiam : numerator enim exprimit energiam ; denominator est coëf-

Si haec expressio energiae mediae inseritur in aequalitate (1), obtinetur :

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{u}_{\nu T} = \frac{8 \cdot \pi \cdot \nu^2}{c^3} \cdot \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - 1}$$

Relatio inter $\mathbf{u}_{\nu T}$ et $\mathbf{i}_{\nu T}$* sinit comparationem huius conclusionis cum experimentis (cfr. nn. 8, 10) ; congruentia autem egregia est, per integrum campum frequentiarum, prout postulat lex empirica Lummer-Pringsheim (cfr. nn. 5, a ; 6, a ; 7 ; 12, c).

---

ficiens mere numericus, quia $h \cdot \nu$ et $k \cdot T$ pariter exprimunt quasdam energias, quarum proportio est merus coëfficiens numericus.

* Pro intensitate $\mathbf{i}_{\nu T} = c/8\pi \cdot \mathbf{u}_{\nu T}$, colligitur expressio

$$\mathbf{i}_{\nu T} = \frac{\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - 1} = \frac{\text{energia}}{\text{superficies}} \qquad \text{(cfr. n. 8) ;}$$

tandem $\mathbf{i}_{\nu T}$ multiplicanda est per intervallum frequentiarum $d\nu$ ut colligantur illi fluxus energetici, qui directe experimentis mensurantur.

En conspectus variarum solutionum :

Planck $\qquad \mathbf{i}_{\nu T} = \frac{c^2 \cdot h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c \cdot h}{k \lambda \tau}} - 1}$ $\qquad$ [c = velocitas lucis] [k = constans Boltzmann]

Wien $\qquad \mathbf{i}_{\nu T} = \frac{c^2 \cdot h}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{c \cdot h}{k \lambda T}}$

Rayleigh-Jeans $\qquad \mathbf{i}_{\nu T} = \frac{c \cdot k \cdot T}{\lambda^4}$

Gianfranceschi $\qquad \mathbf{i}_{\nu T} = \frac{4\, a^3 \sigma}{\sqrt{\pi} \cdot \lambda^5}\, \lambda\, T \cdot e^{-\frac{a^2}{\lambda^2 T^2}}$ $\qquad$ [a = coëfficiens legis Wien - σ = coëfficiens legis Stefan

Sola formula P. Gianfranceschi bene respondet (sub aspectu quantitativo) formulae Planck, per integrum campum frequentiarum (cfr. 13, c, e) ; formula Wien accedit (sub ipso aspectu quantitativo) formulae Planck solum pro inferioribus valoribus producti $\lambda \cdot T$ (seu T/ν), scilicet pro inferioribus temperaturis et altioribus frequentiis ; idem dicen-

Ex experimentis colligitur etiam mensura quae competit actioni elementari h ; etenim, in formula (3), omnes factores (praeter h) vel sunt valores constantes iam noti, vel directe mensurari possunt ; colligitur autem :

$$h = 6{,}61 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec.}$$

Solutio Planck obtemperat etiam omnibus condicionibus quas postulant leges Stefan et Wien* (cfr. 6, d ; 12, a, b).

Patet singularis praestantia solutionis Planck prae ceteris solutionibus ab aliis physicis propositis (cfr. n. 13, b, d, e), quae vel solum partiales sunt, et partim non congruentes cum datis empiricis, vel saltem non obtemperant novissimae condicioni (1) quam Planck detexit.

16. De necessitate hypothesis anticlassicae.

Exacta congruentia, qua tam multiplicia elementa, empirica et theorica, in unum fusa sunt, vi unius hypothesis Planck, valde commendant ipsam hypothesim. Nihilominus argumentatio, quae ad illam duxerat, punctum debile involvebat in ipso suo fulcimento. Planck enim collegerat ex classicis principiis electrodynamicae relationem illam (1) quae tandem postulabat hypothesim anticlassicam : talis hybrida commixtio

---

dum est de formula Rayleigh-Jeans pro altioribus valoribus $\lambda \cdot T$, scilicet pro altioribus temperaturis et inferioribus frequentiis (cfr. 6, e ; 13, b, d).

Formula Rayleigh-Jeans non obtemperat condicioni collectae ex lege Wien (i. e. : $\mathbf{i}_{\lambda T} = \lambda^{-5} \cdot F(\lambda \cdot T)$; cfr. 12, b) ; nulla formula (nisi formula Planck) obtemperat novissimae condicioni ab ipso Planck detectae (i. e. : $\mathbf{i}_{\nu T} = \nu^2/c^2 \cdot \overline{\mathbf{E}}_{\nu T}$).

* Nominatim notanda est congruentia cum peculiari condicione, collecta ex legibus Wien, quae iam definit generalem lineamentum functionis $\mathbf{e}_{\nu T}$, et consequenter etiam functionis $\mathbf{i}_{\nu T}$. Expressio enim huius functionis (v. notam praecedentem), si refertur ad longitudinem undae $\lambda = c/\nu$ (applicatis etiam regulis calculi differentialis ad colligendam variationem infinitesimam $d\lambda$ ex variatione $d\nu$) est :

$$\mathbf{i}_{\nu T} = \frac{c^2\, h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c\, h}{k \lambda T}} - 1}$$

conceptionum oppositarum ut dubiam exhibebat interpretationem hypothesis quanticae.

Dubium manebat utrum hypothesis verteretur circa physicum mechanismum, quo reapse produceretur mutuatio energiae inter materiam et aetherem, an potius ageretur de artificio mathematico, cuius gratia lineamenta characteristica spectri corporis nigri describi possent formulis analyticis.

Progressu temporis vero haec difficultas penitus superata est, quia eadem relatio (1) demonstrata est alia methodo (iuxta theoriam mathematicam de autooscillationibus), quavis incongruentia immune. Etiam aliae demonstrationes productae sunt ipsius formulae (3), inter quas ea speciatim notanda est, qua Einstein simul collegit sive formulam Planck de distributione energiae in spectro corporis nigri, sive formulam Maxwell de distributione velocitatum inter moleculas aëriformium (cfr. n. 11).

His comprobationibus superadditis, iam sine ulla haesitatione affirmanda est necessitas explicandi spectrum corporis nigri non applicando principium aequipartitionis energiae.

Accesserunt tandem profunda studia, quibus Lorentz,* et praesertim Poincaré,** accuratius demonstrarunt sive necessitatem cuiusdam hypothesis anticlassicae, sive indolem huius necessitatis. Hae demonstrationes, mathematico rigore, hoc definite probant: ut dari possint systemata elementaria, quorum energia media statistica congruat cum expressione (2) a Planck conscripta (vel etiam cum alia expressione eiusdem typi), necessarium est ut ipsis systematibus tribuantur proprietates anticlassicae; nota autem characteristica physicae classicae ponitur in illis principiis hamiltonianis, quae postulant evolutiones phaenomenorum fieri ad normam cuiusdam summae oeconomiae; talia sunt principium minimae actionis, ad phaenomena dynamica quod attinet, et principium minimi temporis, quoad propagationem energiae radiantis (cfr. 44 B).

* H. A. Lorentz, « Atti Congresso Matematici in Roma », 1908.

** H. Poincaré, « Journal de Physique », vol. 11, 1912 — *Les idées modernes sur la constitution de la matiere*. Conférences faites en 1912. Paris, 1913. — *Dernières Pensées*. Flammarion, Paris.

17. De significatione et vi hypothesis Planck.

a. Argumentatio, qua Planck usus est, corroborata nonnullis subsequentibus demonstrationibus (cfr. n. 15), directe probat energiam mediam statisticam systematum elementarium irradiantium exprimendam esse formula (2), vel alia eiusdem typi; haec conclusio autem involvit necessitatem cuiusdam hypothesis anticlassicae circa naturam et proprietates ipsorum systematum elementarium.

Peculiaris autem hypothesis de structura et evolutione horum systematum, prout a Planck primo definita est, haberi non potest ut comprobata nisi accedant argumenta, quae ostendant talem hypothesim esse non solum sufficientem, sed etiam necessariam.

Reapse haec peculiaris hypothesis (quae exhibet [cfr. n. 14] systemata elementaria velut apparatus oscillantes, praeditos ipsa frequentia ν quam irradiant), seponenda est. Progressus studiorum (ut late dein considerabimus, in altera parte tractationis) duxit ad definienda solum quaedam generalia lineamenta systematum atomicorum, quae iam non comparantur ad systemata oscillantia, cuius frequentia oscillationis sit ipsa frequentia quam irradiant; confirmati vero sunt interni gradus energetici atomorum, per saltus distincti; ad definiendos hos saltus energeticos partem essentialem habet (non minus quam in pristina hypothesi Planck) « quantum » elementare actionis h; tandem frequentia radiationis emissae nectitur cum interno saltu energetico iuxta ipsam relationem fundamentalem Planck $\nu = \Delta E/h$, seu $\Delta E = h \cdot \nu$.

Iamvero etiam hoc exemplar systematis atomici ducit ad colligendam ipsam formulam (3), qua Planck definivit spectrum corporis nigri. Einstein usus est istis notionibus ad conficiendam illam perfectiorem demonstrationem legis Planck, de qua in praecedenti paragrapho diximus.

b. Hae animadversiones ostendunt pristinam hypothesim Planck, recte detegisse nonnulla lineamenta systematum elementarium materiae; quaedam vero proprietates nonnisi hypothetice affirmari poterant, seu disiunctive: quatenus admit-

tendae erant in re vel illae ipsae proprietates, vel aliae (aequipollentes quoad mechanismum emissionis energiae) quae tamen iam per similitudinem illustrabantur peculiari exemplari excogitato. Propterea hypothesis Planck nobis suppeditat exemplum cognitionis scientificae, quae iudicio non fallaci penetravit naturam rerum et phaenomenorum, quamvis ageretur de cognitione imperfecta et analogica. Hac conclusione dein utemur ad declarandam quaestionem philosophicam de vi nostrae cognitionis de mundo physico, contra sententias agnosticas neopositivismi.

c. Comprobationes hypothesis Planck, quae progressu temporis compertae sunt, divinari non poterant cum primo theoria quantica producta est ; quare tunc temporis nova et inopinata hypothesis, eius incerta interpretatio, et praesertim eius natura anticlassica excitaverunt potius reactiones conservatorum. Controversiae de hac re protractae etiam sunt plus quam per quinque lustra. Ipse Planck initio, persentiens difficultates, imminuit vim sui inventi : anno 1911, Berolini, publice disserens de sua hypothesi, declaravit ipsam non postulare structuram quanticam pro quavis forma energiae, sed solum in processu emissionis energiae a materia candescenti ; rem magis declarans, asseruit etiam talem phaenomenon referri posse ad actiones elementares atomicas non continuas, quorum gratia etiam probabilitates phaenomenorum evolverentur modo non continuo.

Subcrescens auctoritas theoriae quanticae facta est non tam propter profundiora studia theoretica Poincaré (quae ceteroquin neque satis divulgata erant), sed potius propter foecundas eius applicationes ad alia phaenomena explicanda. De his agimus in sequenti articulo.

Articulus II

Applicationes hypothesis Planck ad varia phaenomena interpretanda

18. De effectu photoëlectrico.

a. Natura phaenomeni.

Einstein primus, felicissimo successu, adhibuit hypothesim quanticam ad explicandum phaenomenon photoëlectricum.

Ut iam notissimum est propter applicationem phaenomeni ad televisionem conficiendam, radii lucis (sicut etiam radii ultra-violaceum, radii X et γ), impingentes in metalla, ex ipsis metallis evellunt electrona, et illa etiam propellunt, eis conferendo velocitates et energias cineticas, quae experimentis mensurari possunt.*

b. Leges characteristicae phaenomeni.

1. Radiationes non producunt phaenomenon nisi attingant certam frequentiam, satis altam ; datur scilicet « limen photoëlectricum » (certa frequentia definitum), infra quod ra-

* Variae velocitates et energiae electronum aestimantur ex varia flexione eorum traiectoriarum, cum ipsa electrona deducuntur per campum electricum : actio enim campi electrici trahit (vel repellit) electrona et consequenter flectit eorum traiectorias, ea ipsa ratione qua campus gravitationalis terrestris trahit corpora proiecta et flectit eorum traiectoriam (quae parabolica fit). Huiusmodi actiones (attractivae vel repulsivae) pendent ex intensitate campi (quae supponitur nota) et ex quantitate electricitatis e singulorum electronum ; non pendent vero ex velocitate ipsorum electronum ; tamen, inter definitum intervallum temporis, electrona velociora percurrunt maiora spatia ; quare eorum traiectoriae acquirunt flexiones leviores.

Ut bene notandum est, traiectoriae electronum non conspiciuntur directe, sed indirecte ex effectibus quos ipsa electrona producunt : impingentia enim in moleculas atmosphaerae, illas vertunt in iona ; haec autem producunt condensationem vaporis aquaei ; quare apparent velut sciae iuxta ipsas traiectorias electronum ; hae sciae revelantur apparatu « camera Wilson ».

diationes, etsi intensissimae (seu magna energia praeditae) nullum electron evellere valent.

« Limen photoëlectricum » varium quidem est pro diversis metallis, quibus competit varia « sensibilitas », sed, pro quolibet definito metallo, datur definitum « limen photoëlectricum ».

2. Cum primo « limen photoëlectricum » attingitur, illico effectus producitur, etiamsi intensitas radiationum sit tenuissima. Augetur autem intensitas effectus ratione directa una cum intensitate radiationum.

3. Velocitates, quae conferuntur electronibus avulsis et proiectis, eo maiores fiunt quo altiores sunt frequentiae radiationum.

c. Principia classica non explicant phaenomenon.

Iuxta electromagnetismum maxwellianum, radiationes consistunt in perturbationibus electromagneticis aetheris, quae oscillatoriae sunt et propagantur per aetherem motu undulatorio. Status energeticus aetheris provenit ex ipsis tensionibus electricis et magneticis, ea fere ratione qua corpora elastica, si tenduntur vel comprimuntur, acquirunt statum energeticum. Tensiones autem, sive electricae sive magneticae, supponuntur diffundi per aetherem modo continuo ; quare ipsa energia radiationum supponitur diffundi posse et dividi modo continuo usque ad infinitesimas portiones evanescentes. Tandem actio radiationum in electrona adscribitur ipsis viribus electricis campi electromagnetici.

Iuxta has ipsas hypotheses haberi potest campus electromagneticus valde intensus, etiamsi frequentia radiationum non sit alta ; et vicissim altissima frequentia radiationum bene copulari potest cum energia valde debili.

Si haec omnia supponuntur, iam non intelligitur cur dentur radiationes valde intensae, quarum energia non valeat ad evellendum vel unum electron, quantumvis protrahatur fluxus energeticus ; neque intelligitur cur radiationes tenuissimae statim phaenomenon excitent sine ulla mora.

d. Explicatio quantica.

Einstein supposuit energiam radiantem constitui granulis elementaribus, non solum — ut Planck postulaverat — in processu emissionis radiationis thermicae, sed universatim : nominatim etiam cum energia radians propagatur per spatium. Haec granula energetica denominavit « photona » ; supposuit etiam eorum quantitatem energiae proportionem directam habere cum frequentia ν radiationum, iuxta ipsam formulam fundamentalem Planck :

$$\varepsilon = h \cdot \nu$$

Quare photona habentur velut proiecta, quorum energia crescit una cum frequentia radiationum. Hisce autem positis, leges phaenomeni photoëlectrici perspicue explicantur : actio enim inter radiationes et electrona seiunctim absolvitur inter singula photona et singula electrona, ea fere ratione qua proiecta, impingentia in murum latericium, inde evellunt et proiciunt fragmenta.

Usquedum frequentia ν radiationum non est satis alta, singula photona pollent parva energia ($\varepsilon = h \cdot \nu$) ; quare non evellunt electrona ex metallis, etiamsi radiatio sit valde intensa, seu constituatur ingenti numero photonum ; pari ratione guttulae pluviae, quantumvis copiosae, nullum fragmentum evellunt ex muro.

Cum vero frequentia ν satis alta est ut energia photonis satis sit ad explendum laborem necessarium ad evellendum unum electron, statim phaenomenon producitur, etiamsi radiationes adeo tenuae sint ut nonnisi singula photona, in distinctis momentis temporis, impingant in metallum. Supposita vero sufficienti energia singulorum photonum, avulsio electronum manifesto copiosior fit quo intensior est radiatio : augetur enim numerus photonum quae simul agunt.

Tandem quo altior est frequentia radiationum eo maior fit energia singulorum photonum ; quae propterea satis est non solum ad evellendum electron, sed etiam ad illud proiciendum maiori impetu.

e. Congruentia interpretationis quanticae cum experimentis.

Interpretatio Einsteiniana phaenomeni photoëlectrici congruit cum experimentis etiam sub aspectu quantitativo.

Aequatio, quae exprimit talem interpretationem obvia est:

$$\varepsilon = h \cdot \nu = w + \tfrac{1}{2} m v^2$$

quae aequatio asserit energiam photonis ($\varepsilon = h \cdot \nu$) impendi partim ($w$) ad evellendum electron a metallo, partim ad ipsum propellendum, ei tribuendo quandam velocitatem (v) et energiam cineticam ($\tfrac{1}{2} m v^2$) [m denotat massam inertialem electronis, quae nota est].

Si adhibentur radiationes quarum frequentiae ν sint valde altae, et metalla valde sensibilia, ita ut pars w energiae impensae ad evellendum electron valde parva sit et talis quae negligi possit respectu maioris partis energiae ($\tfrac{1}{2} m v^2$) communicatam electroni, sufficienti approximatione aequatio energetica scribi potest:

$$h \cdot \nu = \tfrac{1}{2} m \cdot v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2h}{m}} \cdot \sqrt{\nu}$$

quae relatio comparari potest cum experimentis: reapse autem variae velocitates v electronum (cfr. 17, a: notam) proportionem definitam exhibent cum radice secunda frequentiae ($\sqrt{\nu}$) iuxta coëfficientem ($\sqrt{2h/m}$).

f. De vi et significatione hypothesis einsteinianae.

Einstein supposuit competere radiationibus structuram granularem constantem, inde ab earum emissione a corporibus radiantibus, per totam propagationem per spatium, usque ad earum absorptionem ab electronibus, vel generatim a materia.

Experimenta autem non comprobant haec omnia: effectus photoëlectricus testatur solam absorptionem energiae radiantis fieri per « quanta » elementaria ($\varepsilon = h \cdot \nu$), quae fixam proportionem habent cum frequentia radiationum. Hoc autem non contingit in solo effectu photoëlectrico, sed in quolibet processu, quo materia absorbet energiam radiantem, prout ostendunt experimenta Franck-Hertz (cfr. n. 49, a).

Experimenta vero, et nominatim phaenomenon photoëlectricum nihil manifestant de peculiari forma quae competit energiae radianti ante eius finalem absorptionem; scimus ex contrario energiam induere posse multifarias formas, et nobis non licet illas coarctare et conformare ad solas species quas iam deteximus. A priori bene etiam admittere possumus produci in definito puncto quamdam communicationem energeticam granularem, et illam energiam immediate antea non exhibere parem structuram punctiformem. Aliquid huiusmodi, ex. gr., contingit si membrana sphaerica elastica inflatur et dilatatur: producitur quidam diffusus status tensionis qui competit toti membranae; sed, si ipsa membrana alicubi pungitur acu, statim deficit status ille energeticus diffusus, et peculiaris communicatio energiae producitur in uno puncto.

Subsequentes evolutiones physicae quanticae (quas considerabimus in parte II) comprobaverunt omnes emissiones energiae radiantis ex materia fieri per « quanta », et non in solo phaenomeno irradiationis thermicae; quare iure affirmamus tum emissiones tum absorptiones energiae radiantis generatim fieri per « quanta »; sed haec omnia nondum probant photonibus permanenter competere distinctas unitates, etiam cum energia radians propagatur per spatium. Ceterum ipse Einstein, illustrando suam interpretationem de effectu photoëlectrico, affirmavit solam vim euristicam exemplaris corpuscularis, seponendo quaestionem de eius significatione.

19. De effectu Compton.

a. Natura phaenomeni et eius incongruentia cum theoria undulatoria classica.

Radii X, cum penetrant in materiam, partim diffunduntur in omnes sensus; radiationes autem diffusae, pro una frequentia ν radiationis incidentis, exhibent duas distinctas frequentias, quarum altera est ipsa pristina frequentia ν, altera est nova frequentia ν' aliquatenus inferior; frequentiae imminutae ν' respondet nova longitudo undae λ' aliquatenus aucta. Compton hoc phaenomenon detexit anno 1923.

Plures factores influunt in phaenomenon :

1. pondus atomicum materiae reflectentis : si agitur de pondere atomico non alto, in radiatione diffusa praestat frequentia imminuta ν' ; haec vero fere deest si materiae diffundenti competit pondus atomicum satis altum ;

2. frequentia ipsa radiationis primariae incidentis : quo altior est ν eo clarius distinguuntur duae frequentiae ν et ν' ;

3. angulus quem directio radiationis diffusae efformat cum directione radiationis incidentis : differentia inter duas frequentias ν et ν' maior fit una cum maiori amplitudine dicti anguli ; quare differentia maxima contingit pro radiationibus diffusis, quae exacte regrediuntur in sensum oppositum respectu radiationis primariae ($\vartheta = 180°$) ; nulla vero differentia frequentiarum producitur pro radiationibus diffusis, quae non declinant a pristina directione radiorum ($\vartheta = 0°$).

Si discrimen inter radiationem primariam et radiationem diffusam refertur ad longitudinem undarum λ et λ', apparet alia nota characteristica phaenomeni : pro declinatione maxima radii diffusi ($\vartheta = 180°$) differentia $\lambda' - \lambda$ eadem est pro omnibus radiationibus, sine ulla dependentia ex earum frequentiis. Quod explicat cur phaenomenon clare appareat cum agatur de radiis X altioribus frequentiis praeditis ; tunc enim longitudines undarum fiunt minimae, et differentia constans $\lambda' - \lambda$ fit relative maior, et magis eminet.

Mensurae empiricae de variis differentiis $\lambda' - \lambda$ bene resumuntur una sequenti formula :

$$\lambda' = \lambda + 0{,}024\,(1 - \cos\vartheta)$$

unitas mensurae longitudinis undarum est Ångström ($= 10^{-8}$ cm.) ; quare differentia maxima $\lambda' - \lambda$ (pro $\vartheta = 180°$; $\cos\vartheta = -1$) est 0,048 Å.

Theoria undulatoria classica de natura lucis haec omnia non explicat. Iuxta hanc theoriam enim, radiationes diffusae originem ducunt ex motibus oscillatoriis quos electrona magis libera materiae diffundentis ineunt sub influxu campi electrici oscillantis quo constituitur radiatio primaria ; sed si haec supponuntur, nulla mutatio frequentiae produci potest : electrona enim oscillant pari frequentia quam campi electrici radiationis primariae ; et radiationes diffusae oscillant pari frequentia quam electrona.

b. Interpretatio quantica phaenomeni.

Haec interpretatio phaenomeni recensenda est inter argumenta magis perspicua pro hypothesi photonum.

Iuxta hanc hypothesim, unumquodque systema elementare, producens effectum Compton, constituitur uno photone et uno electrone : photon autem impellit electron. Talis ictus obtemperare debet legibus fundamentalibus de conservatione energiae et de conservatione impulsus, perinde ac si ageretur de ictibus inter corpuscula perfecte elastica.

Statim apparet cur (post ictum) imminuta sit frequentia photonis residui : photon enim incidens, suo impulsu, communicat quamdam quantitatem motus electroni ; quod nequit fieri sine imminutione energiae ipsius photonis ; minori vero energiae respondet minor frequentia, iuxta formulam $\nu = \varepsilon/h$.

Attributio cuiusdam impulsus photoni non arbitrio facta est ad explicandum phaenomenon ; nam ipsa experimenta probant lucem exercere pressionem in corpora quae eam absorbent. Theoria electromagnetica, plene congruens cum experimentis quoad hanc rem, demonstrat quantitati W energiae radianti associandam esse quamdam quantitatem motus (electromagneticam) W/c, quae etiam exprimit capacitatem impulsus ; propterea etiam interpretatio quantica de natura lucis associare debet singulis photonibus quemdam impulsum $h \cdot \nu / c$.

Tandem theoria quantica effectus Compton accurate comparanda est cum experimentis, ut rite comprobetur etiam sub aspectu quantitativo. Hanc comparationem sinunt duae leges (de conservatione energiae et de conservatione impulsus) quibus obtemperant ictus elastici, et quibus obtemperare debet etiam effectus Compton, iuxta eius interpretationem quanticam.

Notandum est principium conservationis energiae exprimi per aequalitatem inter pristinam energiam et summam (arithmeticam) duarum energiarum partialium in quas pristina ener-

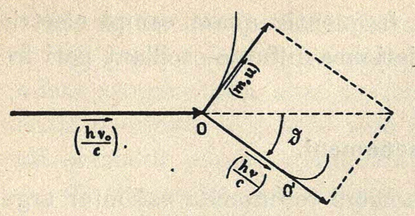


fig. 7

gia dividitur. Principium vero conservationis impulsus respicit magnitudines vectoriales, quibus competit etiam quaedam directio, et quarum compositio vel decompositio fit iuxta notam regulam parallelogrammatis (fig. 7).

Hisce suppositis, duae condiciones quibus phaenomenon obtemperare debet, exprimuntur sequentibus duabus aequalitatibus :*

$$h \cdot \nu = h \cdot \nu' + \tfrac{1}{2} m \cdot v^2 \qquad [v = \text{velocitas electronis}]$$

$$\frac{\overrightarrow{h \cdot \nu}}{c} = \frac{\overrightarrow{h \cdot \nu'}}{c} + \overrightarrow{m \cdot v}$$

Ex quibus aequalitatibus (applicato theoremate Carnot de relationibus inter latera triangulorum) facile colligitur :

$$\nu - \nu' = \frac{h\,\nu\,\nu'}{m\,c^2}(1 - \cos\vartheta)$$

seu :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m\,c}\,(1 - \cos\vartheta)$$

Si pro h, m, c ponuntur eorum valores (qui noti sunt) colligimus :

$$\frac{h}{m \cdot c} = 0{,}0242\ \text{Å}$$

quod perfecte congruit cum datis empiricis.

* Pro altioribus velocitatibus electronum, consideranda est variatio (relativistica) massae inertialis ; hac de causa vero non producuntur nisi variationes minimae sub aspectu quantitativo ; sub aspectu autem theoretico phaenomenon etiam simpliciori ratione exprimitur.

c. Experimenta quae confirmant interpretationem quanticam effectus Compton.

Inde ab anno 1925 accuratissima experimenta perfecerunt Compton et Simon.

Ea minute non describimus ; nonnulla tamen notamus, quorum notitia necessaria erit ad conclusiones colligendas de natura photonum, necnon de modo quo evolvuntur singula phaenomena elementaria ultramicroscopica.

Notemus in primis experimenta talia esse quae valuerunt detegere singillatim phaenomena elementaria diffusionis, manifestando scilicet reactionem inter unum photon et unum electron.

Ipsa experimenta exhibent vestigia phaenomeni, quae omnino congruunt cum indicatione schematica figurae 7.

Traiectoriis electronum respondent vestigia continua (cfr. notam n. 17) ; nullum vero vestigium datur traiectoriarum photonum : ad photona quod attinet non apparent nisi dissitae manifestationes energeticae ; apparent scilicet puncta unde initium habent traiectoriae electronum propter impulsus a photonibus ipsis applicatos. Indirecte vero apparent etiam directiones impulsuum photonum, quae congruunt cum segmentis rectilineis coniungentibus duo puncta (o, o' : fig. 7) in quibus producti sunt duo subsequentes ictus cum electronibus ; agitur de ictibus, qui (pro adiunctis) certe referendi sunt cuidam photoni primario ($h \cdot \nu$) et eius photoni residuo ($h \cdot \nu'$).

20. Structura omnium radiationum quas atomi emittunt.

Compton non detexit phaenomenon, quod eius nomine designatur, nisi anno 1923, cum physica quantica iam plures alias applicationes assecuta erat ; sed effectus Compton speciatim prae ceteris nobis considerandus erat, quia directe respicit naturam lucis, de qua in praesenti agimus.

Aliae praecipuae applicationes theoriae versantur circa structuram atomorum, et de eis agemus in parte altera tractationis. Tamen cum ipsa structura atomorum plura nectuntur quae respiciunt naturam radiationum quas atomi emittunt ; de

his pauca in praesenti innuenda sunt, quia confirmant et comprobant structuram photonum iuxta formulam fundamentalem $\varepsilon = h \cdot \nu$.

Ut sine ullo dubio compertum est, atomi emittunt et absorbent energiam radiantem per distincta « quanta » ; quantitati energiae erogatae (vel absorptae) respondent par imminutio (vel augmentum) energiae internae atomorum ; quare ipsi status energetici interni atomorum non variantur modo continuo inter quoslibet valores, sed per saltus quanticos inter distinctos gradus energeticos $E_1, E_2 \ldots\ldots E_n$, qui etiam empirice definiri possunt. Saltui autem energetico a statu l.simo ad statum k.simum respondet interna imminutio energiae $\Delta E_{l \to k} = E_l - E_k$; par est « quantum » energiae irradiatum ; frequentia autem radiationis (quae analysi spectroscopica empirice mensuratur) reapse est $\nu = \Delta E/h$.

Quare concludimus photonibus, seu « quantis » energiae radiantis, certe competere energiam $\varepsilon = h \cdot \nu$, iuxta hypothesim Einstein et congruenter cum hypothesi fundamentali Planck.

SECTIO II

DE INTERPRETATIONE QUANTICA RADIATIONUM ELECTROMAGNETICARUM

CAPUT I

DUPLEX ASPECTUS RADIATIONUM ELECTROMAGNETICARUM

ARTICULUS I

Aspectus corpuscularis

21. Proprietates recensendae sub aspectu « corpusculari ».

Aspectus « quanticus » radiationum electromagneticarum, qui « corpuscularis » denominari consuevit, colligitur ex dictis in capite secundo praecedentis sectionis.

Distributio energiae in spectro corporis nigri (coniunctim cum condicione [2]) postulaverat quamdam hypothesim anticlassicam (cfr. nn. 14, 15).

Talis hypothesis, prout primo a Planck proposita est, duabus partibus constabat : altera pars exhibebat systemata elementaria irradiantia ad instar oscillatorum harmonicorum ; altera pars affirmabat eorum generaliorem proprietatem absorbendi vel emittendi energiam per « quanta ». Prior pars, non essentialis, dein modificata est ; altera vero, constituit hypothesim novam et essentialem physicae quanticae (cfr. nn. 14, 16).

« Quantum » igitur elementare energiae ($\varepsilon = h \cdot \nu$) et « quantum » elementare actionis (h) sunt fundamentales notae « corpusculares » radiationum.

Hae hypotheses, quae primo modo incerto propositae sunt et tantum pro peculiare phaenomeno, dein late et foecunde applicatae sunt :

— effectus photoëlectricus (cfr. n. 18, a-f) ;

— effectus Compton (cfr. n. 19, a-c) ;

— radiationes omnes, quas atomi emittunt (cfr. n. 20) manifestant radiationes electromagneticas generatim emitti et absorberi a materia per « photona », seu per « quanta » energiae, quorum mensura nectitur cum frequentia radiationum iuxta ipsam formulam fundamentalem Planck : $\varepsilon = h \cdot \nu$.

Nullum phaenomenon manifestat photonibus competere unitatem permanentem, ita ut propagatio energiae per spatium involvat definitas traiectorias ipsorum photonum.

Effectus Compton ostendit photonibus competere etiam impulsum $h \cdot \nu / c$, seu proprietatem vectorialem, cui respondet peculiaris actio in definitam directionem ; sed haec proprietas non necessario postulat unitatem permanentem photonis et quamdam eius traiectoriam.

Effectus Compton, in peculiaribus adiunctis experimentorum (cfr. 19, c et fig. 7), ostendit etiam quasdam dissitas sed ordinatas actiones photonum quarum praecedens procul dubio quadam ratione influit in subsequentem ; ob haec adiuncta facile nos mente colligimus illas distinctas manifestationes energeticas una linea continua, quam nobis fingimus velut traiectoriam photonis ; sed huiusmodi eleboratio nostrae mentis non sine extrapolatione tribueretur ipsi phaenomeno.

Notandae vero sunt, tamquam verae notae energiae radiantis, peculiares proprietates, quarum vi manifestationes energeticae in effectu Compton obtemperant principiis conservationis energiae et conservationis impulsus ; agitur autem de proprietatibus, quae conformant hoc phaenomenon ad phaenomena ictuum elasticorum inter corpuscula materialia ; quare recensendae sunt inter notas « corpusculares » radiationum electromagneticarum.

Summa igitur harum notarum est :

— « quantum » elementare actionis h ;

— « quantum » energiae, seu photon $\varepsilon = h \cdot \nu$;

— « impulsus » photonum $\vec{p} = \vec{h} \cdot \nu / c$;

— proprietates analogae proprietatibus corpusculorum, quarum causa actiones photonum in electrona obtemperant principiis conservationis energiae et conservationis impulsus.

Non sine practica utilitate hae proprietates denominatae sunt « corpusculares » ob manifestam analogiam, quae illas illustrat ; sed etiam non sine periculo aequivocationis, quia confundenda non sunt photona cum ordinariis corpusculis. Quare prae oculis habenda sunt etiam discrimina inter photona et corpuscula materialia, praesertim si huic nomini associantur notiones et proprietates mechanicae classicae.

22. Discrimina inter photona et corpuscula materialia.

a. Photona carent massa materiali quiescenti.

Eodem nomine « massae » plures res et distinctae proprietates designantur ; in praesenti agitur de illa massa quae « inertialis » dicitur : ea est quae inscribitur in aequatione fundamentali dynamicae : $f = m \cdot a$, in qua littera f denotat vires quae applicantur cuidam corpori ; littera a designat accelerationem (seu augmentum velocitatis per intervallum unitarium temporis), quam ipsum corpus acquirit dum dictae vires f ei sine interruptione applicantur ; tandem littera m designat « massam inertialem » eiusdem corporis. Haec massa exprimit reactionem inertialem, quam corpus opponit ad recipiendam quamdam accelerationem ; nam, pro datis viribus f, quo maior est m eo minor fit a.

Talis massa inertialis confundenda non est cum quantitate materiae corporis : eadem permanente quantitate materiae, eius reactio inertialis varia est pro varia eius velocitate ; corpus quiescens (respectu systematis quod ei applicat vires propulsivas f) minus resistit quam corpus quod iam movetur (motu relativo respectu eiusdem systematis) ; et quo magis crescit velocitas (relativa) corporis accelerandi, eo maiores vires requiruntur ad ei imprimendum definitum augmentum velocitatis. Distinguuntur propterea massa inertialis quiescens (m_0) et massa inertialis corporis moti ; insuper, si agitur de accelerado corpore iam moto, distinguuntur « massa inertialis longitu-

dinalis » (m_l) et « massa inertialis transversalis » (m_t), prout incrementum velocitatis addendum est iuxta ipsam directionem (longitudinalem) motus praeexistentis, vel iuxta directionem orthogonalem (transversalem).

Lorentz, studens motibus corpusculorum electricorum per aetherem, iam noverat has distinctiones ; theoria relativitatis has ipsas distinctiones collegit e suis principiis pro omnibus corporibus, sive electricitate praeditis sive in statu neutro ; experimenta satis comprobarunt has proprietates etiam pro corpusculis neutris.

Variationes massae inertialis definiuntur, sub aspectu quantitativo, sequentibus formulis :

$$m_l = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}^{\,3}} \qquad m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Hae aequalitates ostendunt reactionem inertialem in immensum crescere, et tendere ad valores simpliciter infinitos, cum velocitas v corporis accelerandi accedit et tendit ad velocitatem lucis c ; tunc enim $\sqrt{1-(v/c)^2}$ tendit ad valorem nullum. Quare corpus, praeditum massa quiescenti, neque accelerari potest usque ad acquirendam ipsam velocitatem lucis : applicandi enim ei essent impulsus in infinitum crescentes, et, si velocitas c supponeretur acquisita, impulsus ipsius corporis factus esset simpliciter infinitus. Photona vero, si supponuntur praedita unitate permanenti, dicenda sunt transvehi ipsa velocitate c, et tamen eorum impulsus ($h \cdot \nu/c$) est finitus ; quare ipsis deneganda est massa quiescens. Haec autem nota distinguit photona a corpusculis massa materiali quiescenti praeditis.

b. Photona non obtemperant legibus dynamicae classicae de motu puncti materialis.

Effectus Compton nonnullas analogias exhibet inter photona et corpuscula materialia, nominatim quatenus evolutio phaenomeni obtemperat principiis de conservatione energiae et impulsus.

His non obstantibus, physica photonum nequit describi illis ipsis schematibus, quibus dynamica classica iam descripse-

rat motum puncti materialis. Deficiunt ipsae condiciones supponendae ; nam : deest massa materialis quiescens ; traiectoriae photonum nullatenus nobis apparent ; neque constat photonibus competere unitatem permanentem.

Quodsi etiam velimus supponere unitates permanentes photonum et eorum traiectorias, et considerare massam aequipollentem ipsorum photonum ($h \cdot \nu/c^2$) * nondum ageretur de phaenomeno quod congruat cum schematibus dynamicae classicae puncti materialis : ad photona enim quod attinet, dantur etiam proprietates et phaenomena, quorum descriptio postulat schemata undulatoria** (v. artic. seq.).

c. Definitio photonum exhibet notam non corpuscularem.

Photon est « quantum energiae » radiantis, seu $\varepsilon = h \cdot \nu$; quare ipsa eius definitio comprehendit frequentiam, quae est nota characteristica motus periodici vel undulatorii. ***

---

* In dynamica corpusculorum, pro velocitate v cuiusdam massae m habetur impulsus $p = m \cdot v$; quare massa indicat proportionem inter impulsum et velocitatem, seu $m = p/v$. Applicando hanc ipsam relationem impulsui photonis ($p = h \cdot \nu/c$) et supponendo ipsum photon transvehi velocitate c, colligimus pro photone quamdam massam aequipollentem $m = p/c = h \cdot \nu/c^2$.

Haec expressio massae photonis congruit cum universali relatione, quam theoria relativitatis statuit inter massam et energiam, scilicet $E = m \cdot c^2$; si de photonibus agitur, energia est $h \cdot v$; quare colligimus $m = h \cdot \nu/c^2$. Non agitur tamen de quadam massa materiali quiescenti.

** Proprietates undulatoriae competunt etiam omnibus corpusculis : hoc est peculiare inventum physicae quanticae (cfr. Appendix A) ; quare ipsum discrimen inter photona et corpuscula materialia dynamicae classicae indicat novam analogiam inter photona et corpuscula physicae quanticae.

Haec nova analogia vero (de qua in appendice agemus) non aufert discrimina in praesenti articulo recensita.

Addendum etiam est aliud discrimen inter photona et corpuscula materialia : effectus Compton exhibet photona velut corpuscula quatenus photona, ad instar corpusculorum, communicant suum impulsum electronibus ; deficit tamen in photonibus illa proprietas corpuscularis, vi cuius electrona (et cetera corpuscula) agunt et reagunt inter se : numquam comperta est (immo excludenda est) quaevis mutua actio photonum inter se, ad instar ictus corpusculorum.

*** Discrimen stat, ad hunc propositum, etiam inter photona et

ARTICULUS II

Aspectus undulatorius radiationum electromagneticarum.

23. Phaenomena quae manifestant aspectus undulatorios.

a. Phaenomena diffractionis et interferentiae.

Haec phaenomena praebuerunt prima solida argumenta pro interpretatione undulatoria de natura lucis.

Phaenomenon diffractionis ostendit lucem non recta progredi, sed in varias directiones diffundi. Phaenomenon interferentiae ostendit lucem, additam luci, aliquando producere obscuritatem.

Hae proprietates sufficientes erant ad excludendam pristinam theoriam corpuscularem (Newton), quae lucem habebat ut constitutam veris corpusculis, obtemperantibus iisdem legibus mechanicis (classicis) de motu punctorum materialium.

Non pari certitudine tamen comprobata erat theoria undulatoria, ut sola interpretatio quae concipi poterat. Saltem pristina conceptio Huygens valde emendanda erat; subsequens theoria mechanica Fresnel, quamvis egregie expolita, non parvas difficultates involvebat; tandem theoria electromagnetica Maxwell visa est perfecte referre naturam radiationum, usque dum detecti sunt aspectus quantici radiationum, qui non congruebant cum interpretatione classica de energia diffusa modo continuo per aetherem.*

Hae recentiores difficultates contra interpretationem undulatoriam postulant attentam analysim phaenomenorum,**

---

corpuscula physicae quanticae, quamvis omnibus corpusculis physica quantica associet undas, et propterea etiam frequentias (v. Append. A).

* Cfr. Soccorsi, *De cognitione mundi physici*, Pars II: *De energia radianti*.

** Consule tractatus elementares physicae quoad descriptionem phaenomenorum.

Speciatim notanda est peculiaris condicio, quae necessaria est ut producantur phaenomena interferentiae: undae quae componuntur

et cauta iudicia de eorum significatione. Tamen, ipsa recentior physica quantistica confirmat et retinet quosdam aspectus undulatorios radiationum.

b. Phaenomena polarizationis.

Hoc phaenomenon, quod Fresnel detexit, variis in modis producitur; generatim ostendit radios lucis diversas intensitates assequi, et etiam ex toto extingui, pro variis dispositionibus nonnullorum corporum circa directionem radiorum.

Hoc factum confirmat interpretationem undulatoriam, et etiam ostendit oscillationes non esse longitudinales (seu iuxta directionem radii), sed transversales (orthogonales scilicet directioni radii); hae solae oscillationes enim impediri possunt ab obiectis quae circumdant radium.

Hac de causa, Fresnel emendavit pristinam hypothesim, qua Huygens conceperat undas lucis ad instar vibrationum (longitudinalium) acusticarum; Fresnel vero comparavit oscillationes aetheris vibrationibus elasticis corporum solidorum; solum enim haec corpora ineunt oscillationes transversales.

Haec hypothesis, dum theoriam perficiebat, etiam gravem difficultatem afferebat: postulabat enim pro aethere duas proprietates valde oppositas: summam rigiditatem, cuius gratia excitarentur creberrimae vibrationes; et summam fluiditatem, cuius gratia nulla resistentia opponeretur motui corporum. Subsequens theoria electromagnetica hanc difficultatem superavit.

---

debent esse « cohaerentes ». Hac denominatione designantur undae, quae, pro unoquoque definito puncto, in quo obviae fiunt, constanter ibi retinent definitam differentiam inter suas phases (nullam, vel maximam, vel intermediam); secus non constanter producerentur in definitis punctis definitae gradationes illuminationis.

Ad obtinendam « cohaerentiam » undarum, variae radiationes, quae tandem superponuntur, hauriuntur ex uno eodemque fonte monochromatico, quamvis per diversa itinera deducantur; servanda sunt etiam alia adiuncta (varia pro variis typis phaenomenorum), secus deficiunt phaenomena interferentiae.

c. Undae electromagneticae stationariae.

1. Descriptio phaenomeni.

Maxwell intuitus est naturam electromagneticam lucis, et hanc naturam quasi condidit, concipiendo tales proprietates electricas et magneticas aetheris, quae inferrent perturbationes oscillatorias, quae per ipsum aetherem propagarentur ad instar undarum, et ipsa velocitate lucis.

Confirmatio experimentalis theoriae non statim haberi potuit, propter difficultatem experimentorum. Etenim, prout postulabant ipsae leges electromagnetismi, phaenomenon non poterat assequi sufficientem intensitatem, nisi oscillationes electromagneticae producerentur altissima et definita frequentia. Ad hunc finem vero requirebantur perfectiora media technica.

Post ventennium, Hertz primus valuit experimenta perficere, quae comprobarent existentiam undarum electromagneticarum. Hodie talia experimenta modo longe perfectiori perficiuntur ; tamen eadem est nota characteristica experimentorum, quae necessaria est ad comprobandam naturam undulatoriam phaenomeni. Producendae scilicet sunt peculiares undae, « stationariae » denominatae, quae constanter exhibeant in definitis punctis « nodos » undarum (seu campos electromagneticos nullos), et in aliis definitis punctis « ventres » undarum (seu intensitates maximas camporum).

Haec condicio, ut melius dein patebit, requiritur ut oscillatio electromagnetica probetur non solum induci in dissitam regionem, sed etiam attingere regiones dissitas motibus undulatoriis, quorum gratia variae phases oscillationum progrediuntur per spatium unae post aliae.

Ad producendas undas stationarias opus est ut unda, progrediens iuxta definitam directionem, reflectatur supra seipsam (regrediendo iuxta eamdem directionem, sed in sensum oppositum) ; spatium autem, quod unda percurrit in unum et alterum sensum, talem definitam proportionem habere debet cum longitudine undae, ut exstent puncta in quibus unda progrediens et unda regrediens obviae fiant constanter retinendo pha-

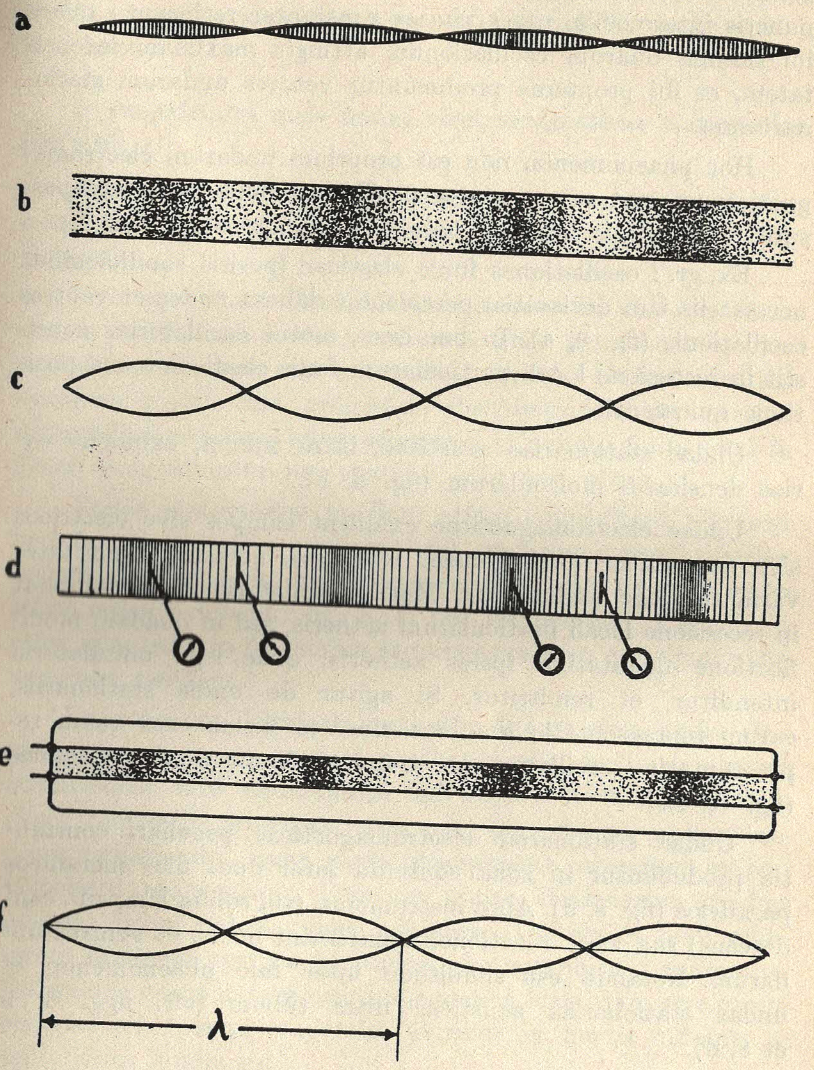


fig. 8

ses oppositas : ibi duo motus oscillatorii mutuo se elidunt, et producuntur nodi (fig. 8). Consequens est ut ipsae undae, in punctis intermediis, pares phases constanter retineant ; quare ibi summa duarum oscillationum attingit maximam intensitatem, et ibi propterea producuntur ventres undarum stationariarum.

Hoc phaenomenon non est proprium undarum electromagneticarum, sed omnes motus oscillatorii illud producere possunt.

Ex. gr. : oscillationes funis elasticae (positis condicionibus necessariis iam declaratis) perspicue exhibent nodos et ventres oscillationis (fig. 8, a). In hoc casu, motus oscillatorius consistit in recessione locali particularum funis elasticae a sua positione quiescenti.

Undae stationariae acusticae, intra tubum, exhibent varias densitates molecularum (fig. 8, b).

Undae electromagneticae exhibent campos sive electricos sive magneticos (orthogonales inter se), quorum intensitates variantur lege undulatoria. Motus oscillatorius iam non stat in recessione locali particularum aetheris, sed in quadam modificatione qualitativa ipsius aetheris, quae lege undulatoria intenditur et remittitur. Si agitur de undis stationariis, earum repraesentatio graphica eiusdem formae est quam repraesentatio oscillationum transversalium funis elasticae (fig. 8, c).

Undae stationariae electromagneticae peculiari constantia producuntur in zona contenta inter duos filos metallicos parallelos (fig. 8, d). Apta instrumenta (vel solum lampada candescens) sua varia reactione, manifestant nodos et ventres undarum. Notanda est similitudo inter tale phaenomenon et undas stationarias acusticas intra tubum (cfr. figg. 8, b et 8, d).

Si ipsum phaenomenon electromagneticum producitur intra tubum, cuius gas satis rarefactum sit, excitantur fluorescentiae, quae suo ipso vario splendore visibiles exhibent ventres et nodos undarum (fig. 8, e).

Comprobant autem naturam electromagneticam horum phaenomenorum sive media technica adhibita ad producendas undas, sive apparatus receptores, qui reagunt illis undis et illas manifestant.

2. Proprietates quas undae electromagneticae stationariae probant.

Dicta experimenta ostendunt dari phaenomena electromagnetica oscillantia, quae, alicubi excitata, per spatium propagantur.

Non agitur vero de inductione in distans, vi cuius variae phases oscillationis fontis irradiantis, illico per totum spatium reproducuntur, sine ullo intervallo temporis. Undae enim stationariae manifestant ordinatam distributionem per spatium diversarum phasium, quae propterea velocitate finita (etsi ingenti) progrediuntur per spatium, una post aliam.

Undae stationariae medium etiam suppeditant ad aestimandam velocitatem propagationis undarum : haec velocitas colligitur ex producto unius longitudinis undae λ (quam undae stationariae exhibent : fig. 8, f) per frequentiam ν oscillationum, quae est ipsa frequentia propria apparatus qui gignit phaenomenon oscillans.

Experimenta descripta vertuntur directe circa undas electromagneticas quae produci possunt mediis technicis ; tamen conclusiones iure extenduntur ad ceteras radiationes, altioribus frequentiis praeditas : una enim dicenda est natura omnium radiationum, quae paria phaenomena ostendunt et pari velocitate propagantur. Ceterum undae stationariae produci possunt etiam radiationibus luminosis (ventres et nodi relinquunt distincta vestigia in lamina photographica) ; comprobatur directe etiam natura electromagnetica lucis, quia sive campi electrici sive campi magnetici pluribus in modis influunt in radiationes luminosas.

24. Formulae Fresnel et earum congruentia cum phaenomenis interferentiae.

a. Indoles formularum.

Theoria undulatoria refert phaenomena interferentiae ad superpositionem plurium undarum cohaerentium : variae gradationes illuminationis producuntur pro variis combinationibus phasium undarum elementarium, et pro variis intensitatibus ipsarum undarum.

Principium Huygens-Fresnel accuratis regulis definit tales superpositiones undarum elementarium, et relativos effectus interferentiae.

Fresnel vertit has regulas generaliores in formulas peculiares, quae (pro variis adiunctis experimentorum) minute definiunt fimbrias interferentiae ; definiunt enim zonas illuminatas et zonas obscuras ; earum formas et extensiones ; varias gradationes illuminationis.

Ad simplicius solvendum problema, Fresnel computavit effectus intra quosdam terminos ; sed etiam hic delimitatus ambitus practice complectitur totum phaenomenon perpendendum ; congruentia autem inter theoriam et experimenta est egregia.

Duo factores physici determinant varias gradationes illuminationis in fimbriis interferentiae : variae phases undarum elementarium ; et intensitates singularum undarum elementarium. Quare Fresnel, ad suas formulas conscribendas, necessario supposuit et applicavit quasdam leges circa hos ipsos factores ; quae leges sunt :

— lex qua variatur intensitas radiationum, dum ipsae progrediuntur et diffunduntur per spatium ;

— lex qua propagantur per spatium variae phases motus oscillatorii.

Has leges exponunt duae subsequentes paragraphi ; interim notemus has ipsas leges supponere et applicare hypothesim classicam de energia radianti diffusa modo continuo per aetherem. Egregia autem congruentia formularum Fresnel cum experimentis visa iam est confirmare etiam hanc interpretatio-

nem de natura energiae radiantis ; tamen sola veritas conclusionum non sufficit ad certe comprobandam hypothesim ex qua conclusiones haustae sunt, nisi illa hypothesis probetur etiam unica, quae poni possit. Scimus ex contrario inventa quantica opponi illi ipsi hypothesi ; quare caute iudicandum est de significatione physica formularum Fresnel.

b. Intensitas radiationum.

Principium Huygens-Fresnel supponit intensitatem singularum undarum elementarium (seu undarum secundariarum) esse maximam iuxta directionem propagationis undae primariae ; dein, hinc inde, intensitas undae elementaris decrescit, et tandem evanescit iuxta directionem orthogonalem.

Fresnel applicavit talem hypothesim ; sed adhuc ei consideranda erat lex, qua (pro singulis directionibus) variatur intensitas radiationum, dum fluxus energeticus, egrediens e quodam puncto O, progreditur per spatium et diffunditur per quemdam subtilem angulum solidum $\Delta\Omega$ (fig. 9).

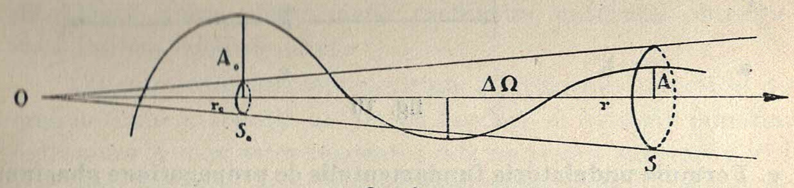


fig. 9

Duae autem propositiones (quae facile demonstrantur*) exprimunt talem legem ; scilicet :

1. Intensitas energetica radiationum ubique proportionem definitam exhibet cum potentia secunda amplitudinis undae :

$$\mathbf{I} = k \cdot A^2$$

---

* Aequalitas $\mathbf{I} = k \cdot A^2$ colligitur ex computatione laboris quem explent vires quae moderantur motus oscillatorios.

Aequalitas $A = A_0/r$ probatur sequenti ratione :

2. Amplitudo undae A, dum fluxus energeticus progreditur et diffunditur, variatur inversa ratione cum radio r percurso :

$$A = A_0/r$$

Notandum.

Hae propositiones involvunt hypothesim classicam de energia radianti diffusa modo continuo per spatium.

Prima propositio nobis maxime notanda est quia medium suppeditavit ad synthesim statuendam inter aspectum undulatorium et aspectum corpuscularem radiationum.

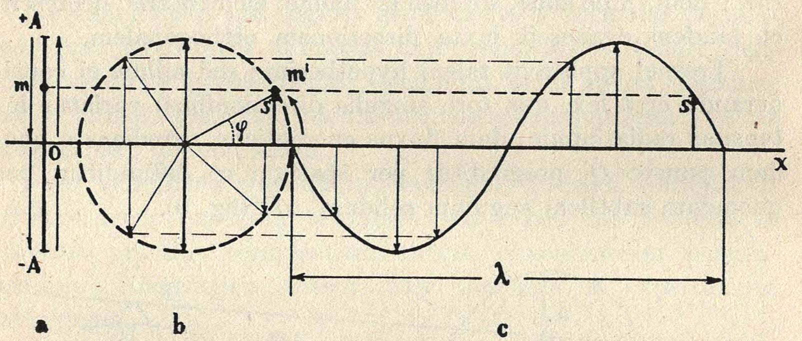


fig. 10

c. Formula undulatoria fundamentalis de propagatione phasium motus oscillatorii.

Lex, qua phases oscillationum progrediuntur per spatium, necessario consideranda erat a Fresnel ut tandem computaret superpositionem phasium distinctarum undarum.

Intensitas energetica **I** aestimatur ex quantitate energiae quae, per intervallum unitarium temporis, fluit per superficiem unitariam ;

$$\mathbf{I} = \frac{\Delta\varphi}{S} = \frac{\Delta w/\Delta t}{S} \qquad \text{(cfr. fig. 9).}$$

Superficies vero S augetur, definita proportione una cum r^2 ; quare tum intensitas **I**, tum A^2 proportionem definitam servant cum $1/r^2$; et tandem A proportionem definitam servat cum $1/r$.

Eadem lex a nobis speciatim notanda est, quia ponit formulam vere fundamentalem theoriae undulatoriae, ad quam revocantur descriptiones cuiuslibet motus undulatorii, utcumque varii. Insuper hae ipsae formulae valebunt ad declarandas (per analogiam) formulas et solutiones recentiores physicae quantisticae.

Describatur in primis motus oscillatorius, quam maxime simplex, qui denominatur « harmonicus ».

Si de oscillatione mechanica agitur, talis motus consistit in peculiari oscillatione puncti materialis m, circa punctum centrale O, iuxta segmentum rectilineum, inter extrema $+A$ et $-A'$ (fig. 10, a).

Oscillatio perficitur lege harmonica si, dum m recedit ab O, sub impulsu quarumdam virium f excitantur vires reagentes f', quae augentur una cum elongatione s massae oscillantis ab O. Tales sunt, ex. gr., vires reactionis elasticae, quae augentur una cum deformatione corporis elastici ; tales etiam sunt reactiones, quas media cohibentia opponunt tensionibus eleclricis, quae sunt velut deformationes (qualitativae) ipsius medii. Quare plura phaenomena oscillantia naturalia obtemperant talibus condicionibus.

Ob reactiones crescentes virium f', velocitas puncti m decrescit dum m recedit ab O ; et tandem m attingit punctum extremum A cum vires reagentes iam nequeunt superari a viribus impellentibus. Hac ratione persolvitur motus oscillans inter extrema $+A$ et $-A$.

Motus ipse plene definitur, si, pro quolibet momento temporis t, cognoscitur elongatio s puncti m. Iamvero talis elongatio omnino eadem est (pro quolibet momento temporis) ac elongatio, quam acquirit ab axe x (fig. 10, b), punctum mobile m', quod percurrat velocitate uniformi circulum (cuius radius sit A), et quod absolvat suum motum cyclicum dum punctum m absolvit integram oscillationem.

Elongatio vero s huius motus rotatorii definitur simplici functione sinusoidali :

$$s = A \sin \varphi$$

cum vero angulus φ augeatur progressu temporis iuxta fixam rationem, si τ indicat periodum motus cyclici, stat sequens proportio :

$$\varphi : t = 2\pi : \tau$$

quare colligitur :

$$s = A \cdot \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

$$= A \cdot \sin 2\pi \nu t$$

Definienda manet lex qua distribuuntur per spatium eaedem elongationes s, quae producuntur in O, si idem motus oscillatorius per spatium propagatur (fig. 10, c).

Velocitas propagationis est λ/τ, seu proportio inter definitum spatium percursum λ et tempus τ insumptum ad ipsum spatium percurrendum. Quare tempus t', requisitum ut definita phasis motus oscillatorii transferatur ab O ad quodlibet punctum x, est $t' = x : \lambda/\tau = x \cdot \tau/\lambda$.

Colligimus definitam elongationem s in puncto x (pro quovis tempore t) esse illam ipsam quae iam producta est in O in tempore anteriori $t - t' = t - x \cdot \tau/\lambda$. Haec vero elongatio (iuxta formulam iam definitam) est :

$$s = A \cdot \sin 2\pi \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{x \cdot \tau}{\lambda}\right)$$

$$= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Haec formula describit propagationem motus oscillatorii et omnium eius phasium : definit enim elongationem s pro quolibet puncto x in quolibet momento temporis t.

Si describere volumus formam quam unda exhibet per spatium in uno definito momento, iam considerandum non est parametrum variabile t, et colligitur formula :

$$s = A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

Haec formula non describit solas oscillationes harmonicas mechanicas, sed omnes oscillationes, quae lege harmonica ab-

solvuntur. Si de oscillationibus electromagneticis agitur, s non repraesentat ullam remotionem localem particularum aetheris, sed tensionem (electricam vel magneticam) cuius valor intenditur et remittitur. Eadem vero figura 10 potest graphice repraesentare has tensiones oscillantes.

25. Conclusiones circa aspectum undulatorium radiationum.

a. Notae undulatoriae rite comprobatae, tribuendae ipsis radiationibus.

Ex dictis in paragraphis praecedentibus sequentes conclusiones manifesto colliguntur :

1. Lux, et quaelibet forma energiae radiantis, consistit in phaenomeno electromagnetico, quod propagatur definita velocitate c ; phaenomenon absolvitur per phases diversas, quae periodice instaurantur ad instar undarum.

2. Intensitas energetica radiationum (cum agitur de phaenomenis, cuius summa energetica aequivalet plurimis photonibus) ita distribuitur per spatium ut congruat cum intensitatibus, quas theoria undulatoria collegerat supponendo energiam distribui modo continuo.

3. Tale phaenomenon nequit ultimatim resolvi in phaenomenon mere corpusculare :

— non solum excludenda est pristina interpretatio corpuscularis, quae supposuerat lucem constitui corpusculis obtemperantibus classicis legibus mechanicis ;

— sed neque aspectus undulatorii phaenomeni revocari possunt ad hypotheticas proprietates corpusculares photonum quorum causa ipsa photona ita agant et reagant inter se ut eorum densitates varientur per phases quae periodice instaurentur.

Hanc coniecturam excludunt effectus interferentiales, qui pari lege producuntur etiam cum lux adeo tenuis est, ut photona nonnisi singillatim, una post alia, supponenda sunt percurrere apparatum interferentiale ; in his adiunctis nulla mutua actio photonum fingi potest. Etiam aliae analyses phaenomenorum interferentialium excludunt dictam coniecturam.

4. Proprietates undulatoriae radiationum absolvi debent peculiaribus proprietatibus, ex quibus pendeant effectus pola-

rizationis et effectus interferentiae. Theoria undulatoria hos effectus referebat ad vibrationes transversales, et ad undas cohaerentes ; si vero hae hypotheses seponendae sunt vel emendandae, aliae proprietates (physicae) pro ipsis ponendae sunt ; photona autem has proprietates non exhibent.

b. Notae tribuendae modo describendi radiationes et non ipsis radiationibus.

Tota descriptio Maxwelliana undarum electromagneticarum permeatur illa nota continuitatis, cui opponitur natura photonum ; sed talis nota directe provenit ex modo describendi phaenomena : est ipsa nota continuitatis, quam exhibet calculus infinitesimalis, cuius auxilio theoria constructa est. Sed notae, quae sunt propriae modi describendi, tribuendae non sunt ipsi obiecto descripto, nisi velimus ultrarealistas agere. Ex alia parte, illa ipsa experimenta, quae nobis comprobarunt plures notas undulatorias radiationum, non valent ad nobis patefaciendam earum structuram microscopicam ; quare sine ulla difficultate possumus non tribuere radiationibus peculiarem structuram continuam.

Tamen, ut bene notandum est, si denegamus radiationibus illam peculiarem notam continuitatis quae propria est descriptionis theoriae electromagneticae, non hoc ipso excludimus quamlibet aliam notam continuitatis, quae potest nos latere, et quae fortasse profundior est et componi potest cum ultimis manifestationibus energeticis quae per quanta fiunt. Immo plura argumenta suadent quamdam aliam proprietatem continuam radiationum : requiritur enim quoddam ens (non « vacuum »), quod constituat spatium physicum et eius extensiones, et cuius gratia non dentur actiones in distans ; congruum autem est supponere tale ens partem habere in propagatione energiae radiantis. Insuper, si photona non gaudent unitatibus permanentibus, sed sunt ultimae manifestationes energeticae quae distinctim producuntur cum energia radians absorbetur a materia, ipsi energiae (quae creata non est) necessario quaedam alia forma antea competebat.

Nota continuitatis, quae propria est modi describendi

theoriae electromagneticae, et quae tribuenda non est radiationibus, triplex est ; hac enim nota afficiuntur :

1. tensiones electricae et magneticae, quae suppositae sunt variari modo continuo, sive quoad intensitatem, sive quoad earum distributionem per spatium ;
2. status energeticus aetheris, qui comitatur illas tensiones, et qui suppositus est diffundi per spatium modo continuo, usque ad attingendas densitates infinitesimas evanescentes;
3. communicatio energiae inter materiam et aetherem, quae supposita est absolvi per ipsas variationes continuas statuum energeticorum sive materiae sive aetheris.

Appendix

Apte adduntur huic articulo de natura undulatoriae energiae radiantis quaedam peculiares notitiae et descriptiones phaenomenorum oscillantium, quae dein necessariae erunt ad declarandas nonnullas quaestiones recentioris physicae quantisticae.

a. Motus periodici exhibentes frequentiam fundamentalem et eius frequentias harmonicas superiores.

Motus oscillatorii periodici, sive naturales sive artificiales, (qui non absolvuntur simplicissima lege harmonica) exhibent quamdam frequentiam fundamentalem ν (quae determinat periodum post quam instauratur idem motus oscillatorius) et frequentias harmonicas superiores 2ν, 3ν, 4ν . . . . ., iuxta quas producuntur quidam motus secundarii, qui (inter periodum fundamentalem $\tau = 1/\nu$) varie afficiunt et modificant motum oscillatorium fundamentalem.

Figura 11 exhibet nonnulla exempla motuum periodicorum, quae satis ostendunt quam varii motus ondulatorii constitui possint si sumantur quaedam unda fundamentalis et eius harmonicae. Si series undarum harmonicarum in indefinitum augetur, obtinentur etiam motus periodici repraesentandi tractibus rectilineis et cuspidibus.

Peculiaris analysis, quam Fourier instituit, ostendit quemlibet motum periodicum resolvi posse in summam plurium

(vel infinitorum) motuum harmonicorum, quorum unus (fundamentalis) determinat periodum post quam instauratur idem motus, et ceteri evolvuntur iuxta periodos multiplas.

Theoremati Fourier competit sequens expressio analytica : quaelibet functio periodica temporis $s = f_{\text{period.}}(t)$ exhiberi

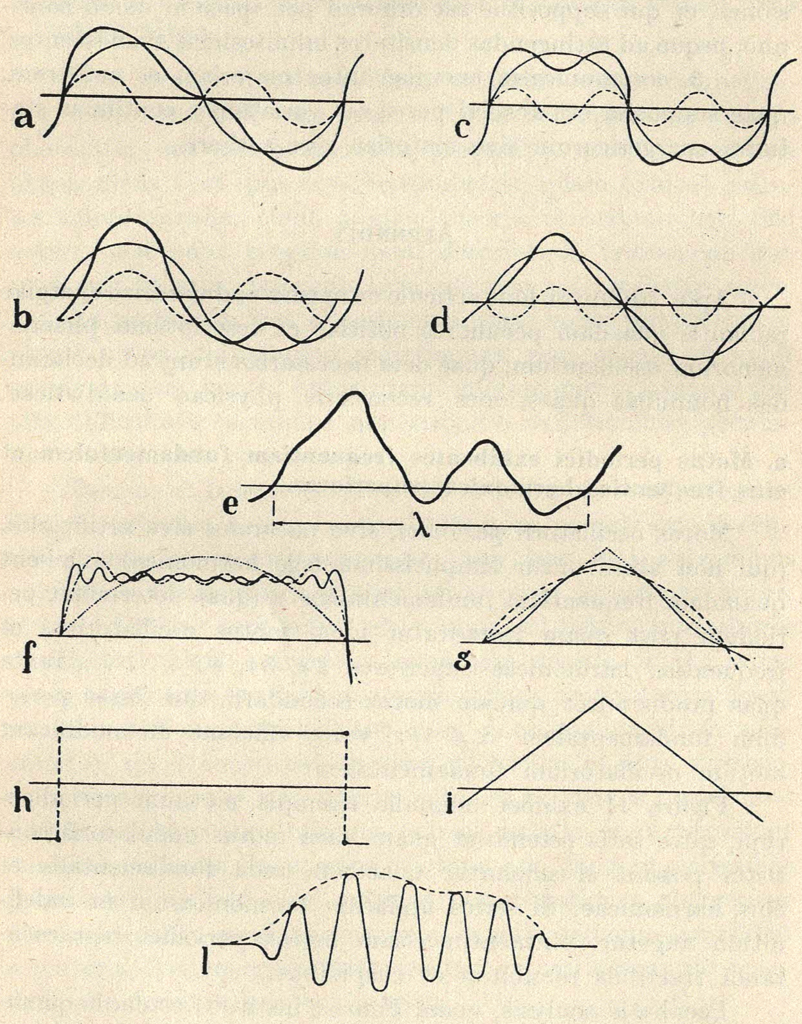


fig. 11

potest ut summa functionum sinusoidalium et cosinusoidalium sequentis typi :

$$\begin{aligned} s = f_{\text{period.}}(t) &= A_1 \sin 2\pi \cdot t/\tau + B_1 \cos 2\pi \cdot t/\tau \\ &+ A_2 \sin 2\pi 2 \cdot t/\tau + B_2 \cos 2\pi 2 \cdot t/\tau \\ &+ \dots\dots\dots + \dots\dots\dots \\ &+ A_n \sin 2\pi n \cdot t/\tau + B_n \cos 2\pi n \cdot t/\tau \\ &+ \dots\dots\dots + \dots\dots\dots \\ &= \sum_{0}^{\infty} {}_n \left[A_n \sin 2\pi n \cdot t/\tau + B_n \cos 2\pi n \cdot t/\tau\right] \\ &= \sum_{0}^{\infty} {}_n \left[A_n \sin 2\pi n \nu t + B_n \cos 2\pi n \nu t\right] \end{aligned}$$

Si describenda est unda, quae pro uno eodemque momento temporis) exhibet omnes phases motus oscillatorii ordinatim distributas per spatium (cfr. n. 24, c ; et fig. 11), series Fourier (quae in hoc casu analysim instituit functionis periodicae respectu spatii) scribitur :

$$s = f_{\text{period.}}(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_n \left[A_n \sin 2\pi n \cdot x/\lambda + B_n \cos 2\pi n \cdot x/\lambda\right]$$

Coëfficientes A_n et B_n exprimunt varias amplitudines quae competunt variis oscillationibus (vel undis) elementaribus. Analysis Fourier regulas praestat ad distinguendas, non solum varias frequentias componentes $n \cdot \nu$, sed etiam relativas amplitudines A_n, B_n.

Notandum.

Analysis Fourier instrumentum mathematicum suppeditaverat physicae classicae ad theoretice definiendas frequentias proprias variarum radiationum.

Theoria enim electromagnetica classica interpretata est radiationes ut undas aetheris, productas a motibus oscillatoriis particularum electricarum ; quare eaedem frequentiae tribuebantur sive motibus oscillatoriis particularum electricarum, sive radiationibus emissis. Hae frequentiae autem (necnon amplitudines relativarum undarum) poterant theoretice colligi (auxilio analysis Fourier) ex peculiari forma, quae (pro peculiaribus adiunctis) tribuenda erat motui oscillanti onerum electricorum.

b. « Fasciculi undarum ».

Peculiarissima compositio undarum obtinetur si frequentiae undarum componentium variantur modo continuo per certum intervallum intra duas frequentias extremas. Talis collectio undarum componit phaenomenon undulatorium (non nullum) tantum intra delimitatum spatium (fig. 11, l) ; in ceteris regionibus vero ipsae undae mutuo se elidunt.

Phaenomenon undulatorium qui producitur apte denominari potest « fasciculus undarum ». Motus autem oscillatorius eo magis coarctatur intra parvum spatium, quo amplius fit intervallum frequentiarum undarum componentium.

Si « fasciculus undarum » fit quasi punctiformis (quia frequentiae componentes tegunt intervallum satis amplum), eius progressus per spatium imitatur motum corpusculi. Hac vero similitudine utitur nova mechanica undulatoria ad describendum motum corpusculorum elementis undulatoriis.

Duae vero velocitates propagationis distinguendae sunt in hoc phaenomeno : « velocitas phasis », quae competit singulis undis componentibus, et « velocitas fasciculi », seu velocitas qua transfertur per spatium punctum in quo undae componentes gignunt maximam amplitudinem phaenomeni oscillatorii.

Si medium per quod undae progrediuntur non est dispersivum (scilicet unus idemque est index refractionis pro quavis frequentia) par est « velocitas phasium » omnium undarum componentium (velocitas enim variatur una cum indice refractionis) ; consequens est ut eadem etiam sit « velocitas fasciculi » : transvehitur enim totum phaenomenon, sine ulla variatione.

Si vero medium est dispersivum, variae sunt « velocitates phasis » variarum undarum componentium ; manifesto igitur discrepat ab illis « velocitas fasciculi », quae nequit simul aequare valores diversos.

Analysis mathematica definit relationem inter « velocitatem fasciculi » et « velocitatem phasis » (mediam) undarum componentium.

Hanc relationem applicat mechanica undulatoria ut tribuat undis fasciculi tales « velocitates phasium », ut « velocitas fasciculi » congruat cum velocitate corpusculi, quod repraesentandum est fasciculo undarum.

c. Motus multiperiodici.

Dicuntur motus multiperiodici illi motus, ad quos componendos concurrunt plures motus periodici distincti.

Ex. gr. talis est motus corpusculi, cui imprimuntur tres oscillationes harmonicae independentes, iuxta tres directiones orthogonales ; coordinatae x, y, z huius corpusculi simul variantur iuxta formulas oscillationum harmonicarum :

$$x = x_0 \cdot \sin 2\pi \, \nu_1 \cdot t$$
$$y = y_0 \cdot \sin 2\pi \, \nu_2 \cdot t$$
$$z = z_0 \cdot \sin 2\pi \, \nu_2 \cdot t$$

Motus magis varius obtinetur si oscillationes componentes non sunt mere harmonicae, sed admittunt etiam frequentias harmonicas superiores.

Generatim motus multiperiodici non exhibent definitas traiectorias, quae periodice claudantur in seipsas. Hoc contingit tantum si variae periodi sunt commensurabiles inter se (seu sunt summultiplae exactae unius eiusdemque durationis) ; in his adiunctis, cum simul exacte absolvuntur omnes periodi, simul instaurantur eaedem condiciones pro omnibus motibus componentibus, et traiectoria redit supra seipsam. Deficientibus vero his condicionibus, traiectoria evolvitur per lineam continuo variam ; quare tales motus apte etiam dicuntur motus « condicionate periodici » ; manifestant scilicet varios periodos quas continent tantum si varii motus componentes supponuntur singillatim evolvi.

Physica quantica speciatim considerat motus multiperiodicos, quia ad illos revocat motus electronum intra atomos.

Caput II

SYNTHESIS CORPUSCULARIS-UNDULATORIA DE NATURA LUCIS IN ORDINE LOGICO

Articulus I

Nexus inter aspectus corpusculares et undulatorios.

27. Quo sensu statuitur synthesis in ordine logico, seiunctim a synthesi in ordine ontologico.

In praesenti capite agimus de synthesi corpusculari-undulatoria in ordine logico ; in subsequenti autem capite eamdem synthesim perpendemus in ordine ontologico.

Hanc quaestionem ponendo in ordine logico, seiunctim a synthesi in ordine ontologico, nullatenus consideramus nostras cognitiones subiectivas velut separatas a mundo physico externo, perinde ac si nostrae cognitiones, in ordine logico consideratae, exhuere possent suam significationem et vim ontologicam. Neque bis quaestionem tractamus, prius exponendo mentem illorum physicorum et philosophorum, qui censent nostras cognitiones de ipso mundo physico absolvi intra fines nostrarum affectionum subiectivarum, vel qui saltem aestimant munus scientiae physicae theoricae non aliud esse nisi revocare ad syntheses conceptuales et analyticas elementa mere empirica.

De his sententiis potius agemus in sequenti capite, perpendendo earum insufficientiam et necessitatem synthesis ontologicae. In praesenti autem agimus de quaestione quae ab

---

Simplicitas causa, adhibita est brevior expressio « de natura lucis » ; sed synthesis generatim respicit omnes radiationes electromagneticas, cuiuslibet frequentiae ; quamvis, ad inferiores frequentias quod attinet, nequeant ea adiuncta comparari, quae valeant ad distincte producendas manifestationes energeticas singulorum photonum.

omnibus consideranda est ; et eam exponimus seponendo varias interpretationes philosophicas, quae ei accedere possunt.

Considerandae scilicet sunt variae notiones, sive corpusculares sive undulatoriae, quae de energia radianti scientifice compertae sunt, et prout a scientia elaboratae sunt : cum utrique aspectus rite comprobati sint, procul dubio inter se cohaerere debent et ad ordinatam synthesim revocandi sunt, etiamsi prima fronte videantur quasi antithetici.

Consideranda in primis est ea synthesis, quam ipsa scientia physica elaboravit. Iure eam dicimus versari in ordine logico, quia variae notae de natura lucis, considerantur prout nostra mente elaboratae sunt : agitur de cognitionibus partialibus (separatis propterea ab aliis notis, quae in re certe non desunt), necnon de schematibus (sive undulatoriis sive corpuscularibus) quae etiam addunt modos describendi, qui naturae lucis referendi non sunt.

28. Conspectus descriptionum phaenomenorum opticorum.

Descriptio undulatoria.

Phaenomena describenda:

Phaenomena diffractionis (n. 23, a)
» interferentiae (n. 23, a)
» polarizationis (n. 23, b)

Formula fundamentalis motus harmonici.

$s = A \cdot \sin 2\pi\, (t/\tau - x/\lambda)$ (n. 24, b, 1)

A = amplitudo oscillationis
τ = periodus oscillationis
$\nu = 1/\tau$ = frequentia radiat.
λ = longitudo undae
$\lambda/\tau = \lambda \cdot \nu$ = velocitas propagationis undae

s exprimit recessionem localem particularum vibrantium (in oscillationibus elasticis)
s exprimit (in oscillationibus electromagneticis) intensitates oscillantes :
— vectoris electrici : E (E_x, E_y, E_z)
— vectoris magnetici : H (H_x, H_y, H_z)

Formulae Fresnel (n. 24, a) :

— describentes phaenomena interferentialia
— collectae ex hypothesi de energia diffusa modo continuo

Intensitas energetica radiationum

$$\mathrm{I} = k \cdot A^2$$

— expressio collecta est ex hypothesi de energia diffusa modo continuo
— ipsa expressio reapse congruit cum intensitatibus illuminationis, quando energia totalis aequivalet plurimis photonibus.

Descriptio corpuscularis

Phaenomena describenda:

Effectus photoëlectricus (n. 18)
» Compton (n. 19)
Frequentiae characteristicae atomorum (n. 20)

Formula fundamentalis quantica.

$\varepsilon = h \cdot \nu$ = energia photonis (n. 21)

ν = frequentia radiationis $1/\tau$
h = « quantum » actionis $6{,}61 \cdot 10^{-27}$ erg sec.

ε/c = impulsus photonis $= \dfrac{h \cdot \nu}{c}$ (n. 21)

c = velocitas lucis

Intensitas energetica radiationum

$$\mathrm{I} = (N \cdot \varepsilon)/V$$

N = numerus photonum
$\varepsilon = h \cdot \nu$
V = volumen, quod N photona occupant in eodem momento temporis.

29. Intensitas energetica radiationum nexum statuit inter descriptiones undulatorias et corpusculares.

Conspectus descriptionis undulatoriae et descriptionis corpuscularis phaenomenorum opticorum indicat earum nexum : intensitas enim radiationum utraque methodo exprimitur : descriptio undulatoria illam refert ad potentiam secundam amplitudinis undae ; descriptio autem corpuscularis illam refert ad densitatem spatialem photonum (ratione habita de energia ε singulorum photonum).

Talis nexus ad synthesim revocat aspectum undulatorium et aspectum corpuscularem radiationum : scilicet, potentia secunda amplitudinis undae est talis magnitudo, quae etiam exprimit, sub aspectu quantitativo, densitatem spatialem photonum :*

$$k \cdot A^2 = \mathrm{I} = N \cdot \varepsilon / V$$

Aliis verbis : lux concipitur ut constituta photonibus ; notitiae vero de photonibus non sufficiunt ad definiendas eorum distributionem per spatium (cfr. n. 22, b) ; auxilium vero praestat theoria undulatoria, quae refert intensitatem radiationum ad potentiam secundam amplitudinis undae, et valet ad computandam talem amplitudinem pro quovis puncto spatii, et pro variis adiunctis phaenomenorum : sive pro luce libere diffusa per spatium, sive pro phaenomenis diffractionis et interferentiae ; sive etiam agitur de luce polarizata vel non polarizata, monochromatica vel non monochromatica.

Hae notitiae suppeditatae a theoria undulatoria iure pergunt adhiberi, quia experimenta comprobarunt intensitates theoretice aestimatas vi principiorum theoriae undulatoriae

* Intensitas energetica radiationum referri potest sive ad earum densitatem spatialem, sive ad intensitatem illuminationis superficierum ; sed etiam haec intensitas, quamvis directe relata ad superficiem, indirecte refertur ad densitatem spatialem energiae : aestimatur enim ex fluxu energetico, qui per intervallum unitarium temporis impingit in superficiem unitariam ; agitur scilicet de aestimanda quadam quantitate energiae, quae, pro uno eodemque momento temporis, distribuitur per spatium.

egregie congruere cum intensitatibus quae reapse producuntur (cfr. nn. 23, c ; 24, a, b).

Accedit quidem nova interpretatio quantica de structura lucis ; sed, etiamsi deficiat fundamentum theoreticum undulatorium, vi cuius intensitates radiationum iam aestimatae erant, non deficit tamen (sub aspectu quantitativo) congruentia talium formularum cum phaenomenis.

Quare eaedem formulae undulatoriae aptae manent ad describendas intensitates radiationum ; tantum variatur earum interpretatio : exhuunt enim pristinam significationem physicam ad normam theoriae undulatoriae (iuxta quam, inter cetera, energia habebatur ut diffusa et communicata modo continuo), et induunt novam significationem, consonam interpretationi quanticae : exprimunt propterea varias densitates photonum, quia (iuxta theoriam quanticam) variae intensitates radiationum constituuntur variis densitatibus photonum.

En igitur conclusio, ad quam ducit exposita synthesis corpuscularis-undulatoria de natura lucis : undae et earum amplitudines sunt instrumenta analytica apta ad computandas distributiones et densitates photonum ; theoria undulatoria praestat methodum ad haec instrumenta comparanda.

30. Amplitudines undae et probabilitates inveniendi singula photona.

Conclusio iam collecta ex synthesi corpusculari-undulatoria de natura lucis adhuc indiget declaratione.

Notanda in primis est quaedam discrepantia inter conceptum intensitatis radiationum, quae ad amplitudinem undae refertur, et conceptum intensitatis quae refertur ad densitatem photonum : prior intensitas exprimitur functione quae variatur modo continuo, dum altera variatur modo non continuo. Tamen structura photonum adeo minuta est, ut producatur nubes energetica practice continua quoties satis alta est densitas ipsorum photonum. Quare, saltem in his adiunctis, functio A^2 practice adhiberi potest ad aestimandas densitates photonum, et quaevis discrepantiae theoricae longe minores sunt quam errores nostrarum mensurarum.

Difficultas vero insoluta manet, si densitates photonum non sunt satis altae, et a fortiori si non habentur nisi pauca photona dispersa per spatium : in his enim adiunctis, deficit ipsa significatio densitatis photonum, et proportiones N/V sine regula variantur in eadem regione spatii pro diversis momentis temporis, vel in regionibus contiguis in uno eodemque momento temporis ; certe tandem ipsae proportiones non congruunt cum functione A^2, quae definitur modo continuo et firmo.

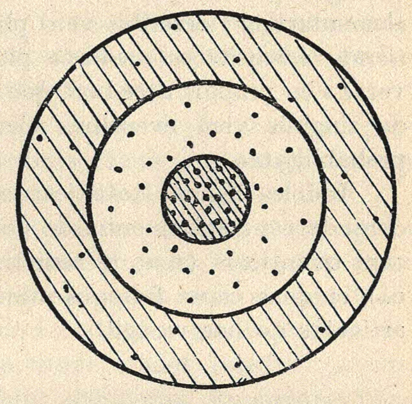


fig. 12

Nihilominus exposita synthesis non caret significatione etiam in his adiunctis. Amplitudo enim undae, quae iam non exprimit « densitatem photonum », exprimit tamen « densitatem probabilitatis » inveniendi singula photona. Probabilitates enim distinctorum eventuum elementarium variantur eadem lege quam densitates verae ipsorum eventuum cum ingens fit eorum numerus.

Haec propositio facile illustratur noto exemplo signi, quod perforatum sit plurimis proiectis (fig. 12). Signum exhibet rosam foraminum, quorum densitas maxima est circa centrum ipsius signi ; dein paulatim et pari lege decrescit in omnes sensus. Iamvero pari lege variantur sive « densitas foraminum » sive « densitas probabilitatis » agnoscendae singulis proiectis ut impingant in unam potius quam in aliam partem signi. Etenim, hae maiores vel minores probabilitates confirmantur et aestimantur a posteriori ex ipsis variis densitatibus proiectorum ; et si singulis iactibus proiectorum competerent diversae probabilitates attingendi signum, etiam rosa proiectorum diversam formam exhiberet.

Idem dicendum est de probabilitate inveniendi singula photona, ex. gr. in phaenomeno interferentiae : ibi probabilitas inveniendi singula photona maior est (vel maiori densitate

gaudet) ubi reapse producitur maior densitas photonum, si ingens fit eorum numerus.

Haec declaratio in lucem fert significationem statisticam, quam acquirit lex undulatoria de intensitate radiationum, si adhibetur ad exprimendas densitates photonum : agitur enim de lege, quae non definit evolutionem singulorum eventuum elementarium ; describit vero phaenomenon collectivum, enuntiando « densitates medias » photonum, ad quas « densitates verae » eo propius accedunt quo copiosiora fiunt ipsa photona ; de singulis vero eventibus elementaribus non enunciat nisi probabilitates.

Indoles legum statisticarum nobis magis accurate consideranda est : agitur enim de nota quae permeat totam physicam quanticam (sive de radiationibus, sive de micromechanica), et quae causa fuit quaestionum philosophicarum. Sequens articulus de hac re agit.

Articulus II

Indoles statistica synthesis corpuscularis-undulatoriae

31. Exempla legum statisticarum.

a. Casus et eius notae characteristicae.

Plurima phaenomena, diversissimi generis, describuntur legibus statisticis : agitatio thermica molecularum aëriformium ; facta socialia, sive mere physica (respicientia vero vitam hominum), sive et praesertim ea quae involvunt actiones humanas et usum liberi arbitrii ; phaenomena microphysicae, sive de energia radianti, sive de structura materiae.

Primum vero (inde a saeculo XVII) aestimationes statisticae productae sunt circa ea quae mero casu dicuntur contingere, non quasi causae non dentur, sed quia adeo multifariae sunt et minutae et extra ambitum nostrae cognitionis, ut earum consideratio iam ex toto seponatur : lusus aleatorii exhibent exempla typica ; ipsi occasionem dederunt ut calculus

probabilitatum excoli coeperit, opera praesertim Pascal et Fermat.

Generatim variae probabilitates quorumdam eventuum peculiarium mathematice exprimuntur variis proportionibus n_i/N inter numeros n_1, n_2 . . . n_i . . . eventuum, qui obtemperant peculiaribus condicionibus, et numerum totalem N omnium eventuum possibilium. Aestimatio autem harum probabilitatum valde attente conficienda est, quia valde variae sunt pro variis adiunctis phaenomenorum.

Consideremus simplicissimum casum de iactu aleae : probabilitas ut obtineatur una definita facies (ea ex. gr. signata IV punctis) est 1/6.

Si fiunt tantum 6 iactus, dicta facies fortasse numquam obtinetur, vel etiam plus quam semel ; quare frequentia huius eventus non congruit cum eius probabilitate ; idem dicendum est usquedum numerus iactuum manet relative parvus.

Si fiunt 100 iactus, frequentiae illius definiti eventus, quae maxime accedunt ad probabilitatem 1/6, sunt 17/100 et 16/100. Fortasse vero colliguntur frequentiae 15/100, 18/100, 20/100. Si instaurantur plurimi centeni iactus, frequentiae quae magis accedunt ad valorem 1/6 procul dubio pluries instaurantur quam frequentiae maiores vel minores (ex.

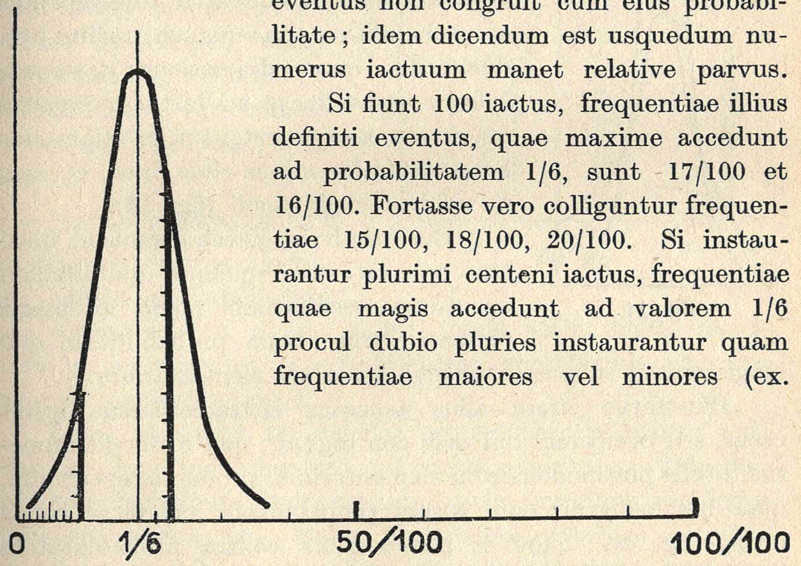
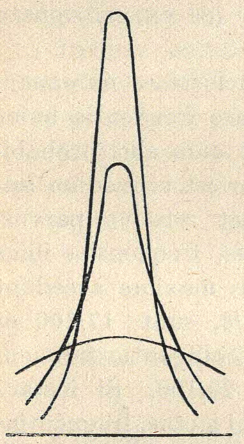


fig. 13

gr. 25/100, 10/100). Haec distributio frequentiarum potest graphice repraesentari (fig. 13) : definitum segmentum dividatur in 100 partes, ita ut singulis distinctis frequentiis n/100 quae obtineri possunt respondeat definitus trac tus. His

vero tractibus apponantur (iuxta directionem orthogonalem) tot parvae areae rectangulares elementares (aequales inter se) quot centeni iactus dederunt relativam frequentiam n/100. Hac ratione colliguntur copiosiores series arearum elementarium prope frequentiam 1/6; ceterae series hinc inde decrescunt, modo non perfecte symmetrico: propterea linea coniungens has extremas areas est ad instar campanae, cuius culmen respondet frequentiae 1/6.

Notanda est characteristica evolutio huius lineae: quo magis multiplicantur centeni iactus, forma lineae magis ac magis acuminata fit; quod si copiosiores fiunt singulae series iactuum (computantur scilicet proportiones eventuum pro singulis millenis, vel deciesmillenis iactibus) tunc frequentiae discrepantes a probabilitate phaenomeni rarius producuntur: quare dimensiones transversales nostrae lineae ad instar campanae magis ac magis coarctantur, et etiam eius bases laterales minus altae fiunt, et linea fit ad instar pinnaculi (fig. 14).


fig. 14

Evolutio huius lineae perspicue illustrat qua ratione frequentia quorumdam eventuum peculiarium magis ac magis congruat cum eorum probabilitate, quo magis crescit numerus phaenomenorum elementarium.

Illustratur etiam alius aspectus characteristicus ipsius casus, seu eventuum qui casu contingunt: quo maior fit numerus totalis phaenomenorum elementarium, productio eventuum, quae non congruit cum eorum probabilitate, magis ac magis negligenda est; quod si phaenomena contra probabilitatem contingunt, non sine lege producuntur: talem enim delimitatam partem obtinere possunt qualem indicant propagines laterales nostrae lineae curvae, repraesentantis varias probabilitates phaenomenorum.

b. Linea Gaussiana de erroribus accidentalibus.

Si circa unam eamdemque rem instaurantur plures mensurae, ob parvos errores accidentales qui vitari nequeunt, mensurae quae colliguntur oscillant circa mensuram exactam. Tamen, si mensurae attente et perite sumuntur, maiori probabilitate (seu maiori frequentia) eae instaurantur, quae magis accedunt ad valorem verum. Gauss definivit formam lineae curvae (fig. 15), quae «gaussiana» denominata est, quae graphice repraesentat maiores vel minores probabilitates errorum.

Coordinatae x denotent varias mensuras quae colliguntur; parvae areae, quae apponuntur distinctis tractibus Δx, proportionem habent cum numero operationum, quibus collectae sunt mensurae intra ipsum intervallum Δx; quare, tales areae, sua maiori vel minori extensione, exprimunt maiorem vel minorem probabilitatem variorum errorum accidentalium; coordinata

$y =$ N.rus mensurarum $/ \Delta x$

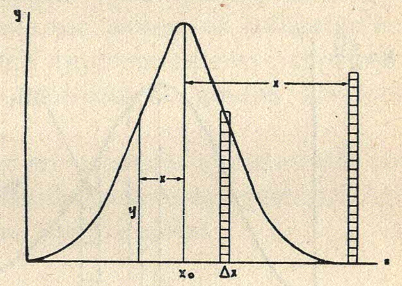


fig. 15

repraesentat varias densitates harum probabilitatum pro variis erroribus x; seu etiam (quod idem dicit), coordinata y repraesentat «probabilitatem specificam» variorum errorum accipentalium x.

Linea gaussiana symmetrica est respectu mensurae optimae x; hinc inde descendit ad instar campanae, valde delimitando variationes mensurarum, quae erroribus accidentalibus tribuendae sint. Maior probabilitas specifica competit erroribus minoribus; seu frequentius instaurantur mensurae magis exactae. Quod si quando frequentius instaurarentur mensurae valde discrepantes, iam indicium extaret errorum, qui accidentales non essent, sed tribuendi essent cuidam peculiari et definitae causae.

c. Lex Maxwell de distributione velocitatum inter moleculas aëriformium.

1. Forma characteristica legis.

Haec lex iam exposita est ad declarandas analogias et discrepantias inter radiationem nigram intra involucrum clausum et agitationem thermicam molecularum intra definitum volumen (cfr. nn. 11 ; 13, c).

Quaedam animadversiones opportune adduntur ad melius ostendendam indolem statisticam legis, et eius formam valde definitam, quae etiam nectitur cum definitis condicionibus physicis.

Numerus totalis N molecularum repraesentetur definita area (fig. 16) ; ipsa area dividatur in partes aliquotas elemen-

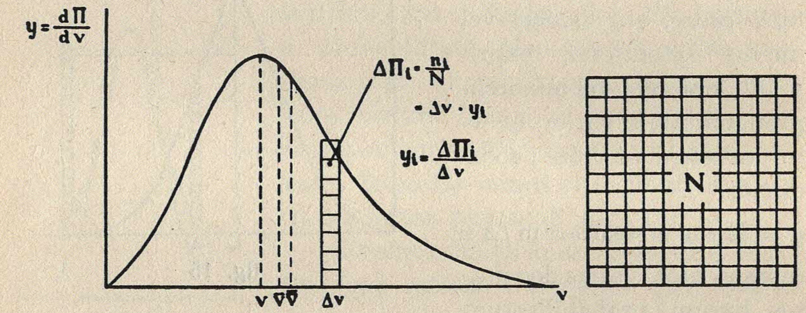


fig. 16

tares aequales, quae singulae repraesentent propterea definitam portionem aliquotam summae N. In repraesentatione graphica, apponantur distinctis intervallis velocitatum Δv_i, tantae ex dictis areis elementaribus, quantae requiruntur ad repraesentandam illam portionem molecularum n_i/N, quarum velocitates (pro uno eodemque momento temporis) comprehenduntur inter ipsa intervalla Δv_i. Variae autem proportiones n_i/N exprimunt varias probabilitates $\Delta\Pi_i$ quae competunt velocitatibus intra ipsa intervalla v_i.

Quare variae probabilitates velocitatum intra varia intervalla Δv_i repraesentantur areis $\Delta\Pi_i = n_i/N$; coordinata

$y = \Delta\Pi_i/\Delta v_i$ repraesentat varias densitates harum probabilitatum, seu « probabilitatem specificam » pro variis velocitatibus v.

Congruentia inter areas $\Delta\Pi_i$ et numeros n_i molecularum, quarum velocitates continentur intra v_i et $v_i + \Delta v$ non est nisi statistica : attendendum scilicet est ad numerum medium molecularum per subsequentia momenta temporis ; tamen fluctuationes numerorum n_i eo magis negligendae sunt quo maior est numerus molecularum.

2. Fundamenta theorica et comprobationes experimentales legis Maxwellianae.

Maxwell collegit suam peculiarem legem de distributione velocitatum supponendo energiam dividi inter moleculas iuxta principium aequipartitionis energiae (quod principium reapse in hoc phaenomeno applicandum est, saltem ut colligatur lex iuxta quemdam primum gradum approximationis) ; applicavit etiam consuetas regulas ad computandos gradus libertatis molecularum.

Lex ipsa satis comprobata est accuratis experimentis circa velocitates, quas variae moleculae reapse assequuntur. Agitur propterea de lege certa (etsi approximata).

3. Vis legis statisticae.

Quamvis agatur de lege statistica, quae non determinat evolutionem singulorum phaenomenorum elementarium, tamen agitur de vera lege, quae ligat evolutionem collectivam phaenomenorum. Ex. gr. impossibile est ut omnes moleculae simul acquirant eamdem velocitatem maxime probabilem ; sed necessario semper exstant moleculae minus veloces, et moleculae velociores, prout postulat ipsa lex : secus deficeret ipsa conservatio energiae totalis, ut facile probatur si energia cinetica totalis omnium molecularum $(N \cdot \frac{1}{2} m \overline{\overline{v}}^2)$ comparatur cum energia cinetica $(N \cdot \frac{1}{2} m \cdot v^2_{m.pr.})$ quae exstaret si omnes moleculae simul exhiberent eamdem velocitatem maxime probabilem.*

* Tres distinctae velocitates notandae sunt :
— $v_{m.pr.}$ = velocitas maxime probabilis, quam lex statistica recte

32. Notae propriae legum statisticarum.

Exempla exhibita iam satis illustrant notas proprias legum statisticarum, quae infra recensentur.

a. Descriptio collectiva plurimorum eventuum elementarium.

Leges statisticae simul describunt integram collectionem eventuum ; et enunciant varias proportiones (seu frequentias, vel densitates) quibus producuntur eventus determinati typi respectu integrae collectionis phaenomenorum elementarium.

Lex exhibet has proportiones ut valores medios, qui eo exactius colliguntur quo copiosiores sunt collectiones eventuum. Quare lex statistica, quae enunciat valores (medios) valde definitos, respicit numerum satis grandem, vel ingentem, phaenomenorum elementarium.

b. Probabilitates de evolutione singulorum eventuum elementarium.

1. Descriptio collectiva et probabilitates singulorum eventuur.

Leges statisticae non definiunt evolutionem singulorum phaenomenorum elementarium ; sed ipsa descriptio collectiva implicite definit varias probabilitates quae competunt singulis phaenomenis elementaribus ut evolvantur in unum vel in alius sensum. Etenim, maiores vel minores probabilitates cuiusdam eventus determinati typi aestimantur et comprobantur ex maiori vel minori frequentia eventuum eiusdem typi cum

---

definit ;

— $\bar{v}$ = velocitas media omnium velocitatum simultaenarum : agitur de valore medio arithmetico $v = (n_i\, v_i)/N$, qui colligi potest ex cognitis variis velocitatibus (mediis) v_i variarum portionum n_i molecularum ;

— $\bar{\bar{v}}$ = velocitas media quadratica : ea velocitas est, quae includitur in expressione energiae cineticae mediae omnium molecularum $\frac{1}{2} m\, \bar{\bar{v}}^2$: ea ipsa velocitas est, cuius potentia secunda est valor medius arithmeticus inter potentias secundas omnium velocitatum simultanearum.

Iamvero, inter has tres velocitates (cfr. fig. 16) stant sequentes inaequalitates : $v\,(m.p.) < \bar{v} < \bar{\bar{v}}$; quare etiam :

$N \frac{1}{2} m\, v_{\text{m.p.}}{}^2 < N \frac{1}{2} m = \bar{\bar{v}}^2$, quod demonstrandum erat.

satis magnum fit numerus eventuum elementarium ; hanc autem frequentiam enunciat lex statistica.

2. Aestimatio probabilitatum: a posteriori et a priori.

Probabilitates cuiusdam peculiaris eventus semper possunt declarari et confirmari a posteriori ; ex frequentia scilicet qua eventus illius typi reapse instaurantur in evolutionibus collectivis plurimorum eventuum elementarium.

Probabilitates possunt etiam aestimari a priori, ex perpensis causis quae influunt in evolutionem phaenomenorum. Hac ratione, ex. gr., aestimavimus probabilitatem 1/6 quae competit singulis faciebus aleae (posita tamen perfecta et homogenea structura aleae). Maxwell collegit legem de distributione velocitatum ex principio aequipartitionis energiae inter moleculas.

3. Calculus probabilitatum et probabilitates phaenomenorum.

Exempla exhibita satis ostendunt « probabilitates » phaenomenorum non colligi ex abstractis computationibus mathematicis ; sed variae sunt pro variis condicionibus physicis systematum.

Leges statisticae de aëriformibus bene illustrant hanc rem : colliguntur enim leges statisticae aliquatenus diversae, magis vel minus approximatae, prout magis vel minus complete considerantur variae condiciones physicae (primariae et secundariae) quae influunt in evolutiones phaenomenorum.

Quare confundendus non est « calculus probabilitatum » cum definitione « probabilitatum » variorum phaenomenorum. Ille ex quibusdam probabilitatibus iam definitis colligit (mathematicis computationibus) probabilitates quae consequenter tribuendae sunt variis combinationibus systematum. Fundamentales vero definitiones probabilitatum pendent ex condicionibus physicis ; aestimari autem possunt a priori, vel etiam solum a posteriori.

c. « Fluctuationes ».

Leges statisticae indicant varias proportiones (seu frequentias, seu densitates) quibus eventus peculiaris typi instau-

rantur in quadam generaliori collectione eventuum ; has ipsas proportiones indicat tamquam valores medios, qui eo exactius reapse producuntur quo copiosiores eventus elementares perpenduntur.

Quod si mensurae vertuntur circa pauciores eventus elementares, ipsi valores medii oscillant circa valores, quos lex statistica indicat : in hoc consistit phaenomenon fluctuationum.

Varia exempla allata de legibus statisticis facile illustrant huiusmodi fluctuationes. Agitatio thermica molecularum maxima perspicuitate exhibet hoc phaenomenon : si considerantur volumina microscopica aëriformium, omnia elementa, quae in ordine macroscopico assequuntur valores (medios) valde definitos, non sunt nisi fluctuantia : ita, ex. gr., velocitas media molecularum, energia cinetica media, pressio, temperatura ; exstant etiam effectus physici harum fluctuationum, motus scilicet Browniani.

Notandum.

Confundendae non sunt « fluctuationes » cum illis discrepantiis inter experimenta et legem statisticam, quae tribuendae sunt ineptae vel non exactae redactioni ipsius legis, quae propterea non bene refert ipsam evolutionem collectivam phaenomenorum.

« Fluctuationes » enim magis ac magis evanescunt quo copiosiores eventus elementares perpenduntur ; aliae vero « discrepantiae » magis definite apparent cum perpenduntur plurimi eventus elementares ; tunc enim apparet phaenomenon collectivum aliter reapse evolvi.

Haec animadversio ostendit leges statisticas, quamvis de singulis eventibus elementaribus non enuncient nisi probabilitates, tamen esse veras leges, quibus evolutio collectiva phaenomenorum reapse obtemperat. Discrepantiae inter phaenomena collectiva et leges, si dantur, demonstrant leges esse erratas ; et nullatenus discrepantiae dicuntur produci quia leges non sunt nisi statisticae, et propterea phaenomena possunt etiam aliter evolvi. « Fluctuationes » autem, quae sequuntur naturam legum statisticarum, perficiuntur intra terminos bene definitos :

lineae gaussianae, quae graphice repraesentant leges statisticas, fines indicant inter fluctuationes et alias discrepantias quae cum lege non congruunt, et quae propterea manifestant aliam causam perturbationis (cfr. fig. 15).

d. « Lex grandium numerorum ».

1. Enunciatum legis.

Leges statisticae, si exprimere debent non meras probabilitates, sed veras evolutiones phaenomenorum, referendae sunt ad grandem, vel etiam ingentem, numerum eventuum elementarium ; hanc condicionem postulat ipsa indoles descriptionis, quae nonnisi collectiva est.

Eadem condicio inverso ordine exprimi potest ; scilicet : phaenomena, quae sua evolutione reproducunt lineamenta legum statisticarum, necessario constituuntur plurimis eventibus elementaribus ; et, si haec condicio servatur, necessario exstant illa lineamenta, quae lege statistica descripta sunt ; secus non staret ipsa lex.

Tales condiciones exprimunt novis locutionibus illas ipsas notas legum statisticarum, quas iam exposuimus, et nullam novam proprietatem superaddunt ; consueverunt vero denominari novo titulo « legis grandium numerorum » .

2. Vis ipsius legis.

Haec autem denominatio ita passim exhibetur ut videatur sibi vindicare quamdam novam significationem et proprietatem, vi cuius phaenomena, quae singillatim sine definita lege evolvuntur, definitam et ordinatam speciem exhibent si grandis fit eorum numerus ; et principium ordinis videtur insitum esse in ipso grandi numero, considerato sub aspectu mathematico.

Non ita res est intelligenda : abstractae enim considerationes mathematicae nullum influxum physicum exercent in evolutionem phaenomenorum ; sed, in casu de quo agitur, grandis ille numerus non est numerus abstractus : infert etiam ingentem numerum causarum, quae reapse influunt in evolutionem phaenomenorum, et quae ponunt illas condiciones physicas, pro quibus leges statisticae collectae sunt.

Quod si dictae causae, etsi variae, simul sumptae, producunt definitos effectus collectivos, hoc ad duas generales rationes revocari potest : vel quia hae multifariae causae vinciuntur inter se quodam mutuo vinculo (quod potest etiam nos latere) ; vel quia distinguendae sunt causae primariae et secundariae : illae iam inferunt definitum lineamentum fundamentale phaenomenorum ; istae, pro sua natura et numero, nullam evolutionem inducunt in peculiarem sensum.

3. Consueta exempla legum statisticarum rem magis declarant.

(*a*) In iactibus aleae, praecipua causa, quae influit in pares probabilitates tribuendas singulis faciebus, est structura aleae, exacte conformata ad formam cubicam, cuius baricentrum stet in ipso centro geometrico : quae condiciones physicae ex intentione comparatae sunt ad obtinendas illas pares probabilitates ; quod si hae ipsae condiciones deficerent, nullus grandis numerus iactuum valeret ad instaurandam eamdem legem statisticam.

Ceterae vero minutissimae causae secundariae, quae etiam influunt in exitum iactuum, pro sua natura et numero, uniformiter influunt in omnes sensus possibiles. Quod si haec condicio deficeret (ex. gr. si arte compararetur quaedam peculiaris adhaesio unius faciei palmae manus) variae proportiones iam non distribuerentur uniformiter inter varios casus possibiles, et nullus grandis numerus iactuum suppleret ad eosdem effectus statisticos instaurandos.

(*b*) « Rosa proiectorum » exhibet suam characteristicam distributionem statisticam ictuum circa centrum signi, quatenus adest causa primaria influens in talem effectum : quae stat in peritia iaculatoris, et in definitis normis severe servatis (circa pondus et formam proiecti ; circa naturam, quantitatem et statum conservationis pulveris pyricae, ...). Accedunt innumerae parvae causae secundariae (errores accidentales ; parvae defatigationes ; parvi motus aëris ...) quae parum afficiunt et modificant effectus proprios causae primariae.

Quod si quaedam ex his causis secundariis praeter modum consuetum gradescunt (pulvis pyrica umida ; ventus instabilis ...) rosa proiectorum iam non obtemperat consuetae legi statisticae ; et grandis numerus proiectorum nullatenus valet ad talem legem instaurandam, sed potius ad detegendam causam inconsuetam, quae in peculiarem sensum influit.

(*c*) In agitatione thermica aëriformium, causa primaria influens in uniformes effectus statisticos macroscopicos est definita quantitas energiae quae dividitur inter definitum numerum molecularum, necnon inter definitos motus elementares qui excitari possunt. Quod si hae condiciones deficerent, nullus grandis numerus molecularum valeret ad instaurandos eosdem effectus statisticos.

Mutui ictus molecularum, pro sua natura et numero, non favent ulli directioni privilegiatae motuum molecularium ; insuper exstant etiam quaedam vincula inter varios effectus possibiles : nominatim effectus singulorum ictuum obtemperant condicionibus de conservatione energiae, et de conservatione impulsuum : nequeunt ex. gr. impulsus duarum molecularum, post earum ictum, utrique augeri in eumdem sensum.

Quod si adest causa quae favet peculiari directioni motuum (ex. gr. campus gravitationalis ; vel campi electrici agentes in iona) eius effectus apparet, et modificat evolutionem phaenomeni collectivi. Recentiora inventa detexerunt alia peculiaria vincula secundaria quae ligant agitationem molecularum et alia similia phaenomena ; propterea novae leges statisticae magis approximatae conscriptae sunt.

33. Lex statistica de distributione photonum et eius notae characteristicae.

a. Descriptio collectiva respiciens simul ingentem numerum photonum.

Lex nonnisi collective describit veram distributionem photonum per spatium ; agitur enim de illa ipsa formula, qua theoria undulatoria descripserat distributionem intensitatis energeticae in phaenomenis complectentibus tantam energiam, ad quam componendam plurima photona requiruntur.

Et nonnisi in his adiunctis eadem descriptio undulatoria retineri potest quamvis defecerit eius fundamentum theore-

ticum ; quia tantum in his adiunctis formula comprobata est bene congruere (sub aspectu quantitativo) cum vera distributione intensitatis energeticae.

b. Probabilitates inveniendi singula photona.

Quaelibet descriptio statistica, si ad singulos eventus elementares refertur, indicat quasdam probabilitates. In casu de quo agitur, amplitudo undae, computata iuxta ipsas hypotheses classicas, exprimit (sua potentia secunda) probabilitatem inveniendi singula photona in determinato momento temporis et in determinato volumine elementari spatii.

Hae vero probabilitates, ut bene notandum est, nullo modo aestimatae sunt a priori, ex perpensis causis quae influunt in evolutionem vel in traiectorias photonum : nihil enim scimus ad hunc propositum ; neque scimus an photonibus competant unitates permanentes.

Agitur propterea de probabilitatibus, quae nonnisi a posteriori collectae sunt, ex consideratis variis densitatibus energeticis quae reapse producuntur et quae egregie congruunt cum potentia secunda amplitudinis undae theoriae undulatoriae classicae.

c. Fluctuationes.

Amplitudo undae theoriae undulatoriae variatur modo continuo ; densitas vero photonum variatur per « quanta » distincta et dissita ; quare duae magnitudines nequeunt exhiberi ut congruentes, nisi quatenus functio A^2 exprimit valores medios intensitatum, et quatenus mensurae circa veras densitates photonum magis ac magis accedunt ad formulam undulatoriam, quo maior fit copia photonum. Si vero phaenomenon constituitur paucis et dissitis photonibus, eorum densitates exhibent valores medios fluctuantes circa valorem statisticum bene definitum.

Practice vero nullae « fluctuationes » apparent : etenim, etiam cum lux est tenuissima, adeo grandis est numerus photonum concurrentium in vel minimas superficies (inter vel minimum intervallum temporis) ut neque oculi neque instrumenta ullas fluctuationes percipere valeant.

d. Lex grandium numerorum.

Ut iam notavimus, haec lex, si aliquatenus explicare debet definitam evolutionem collectivam plurimorum eventuum elementarium, referenda est non iam ad abstractum numerum eventuum, sed ad definitum grandem numerum causarum, et ad modum quo ipsae causae influunt.

Quare, si consideramus effectus opticos et collectivas distributiones plurimorum photonum, nulla vera explicatio phaenomeni hauriri potest ex sola lege grandium numerorum.

Neque conficitur ulla vera explicatio phaenomeni collectivi si coniunctim considerantur sive « probabilitates » inveniendi singula photona, sive « lex grandium numerorum », vi cuius phaenomena collectiva evolvuntur iuxta ipsas maiores vel minores probabilitates eventuum elementarium. Hae enim declarationes resolverentur in tautologicam expressionem rei explicandae : nam ordo collectivus explicaretur per varias « probabilitates » eventuum elementarium, dum hae ipsae « probabilitates » definitae non sunt nisi a posteriori, ex perpensis phaenomenis collectivis. Quare totus discursus nihil aliud assereret nisi phaenomena collectiva ita evolvi quia ita evolvuntur.

Circulus vitiosus superatur tantum si « probabilitates » eventuum elementarium non explicantur unice a posteriori per phaenomena collectiva explicanda, sed referuntur etiam ad earum causas physicas : admittendae scilicet sunt in re quaedam causae (quae nos latent) quae, pro variis adiunctis phaenomenorum, varie influunt in singulas manifestationes energeticas photonum ; sed huiusmodi « probabilitates », seu « internae propensiones physicae », non eae sunt quas definit synthesis logica, de qua hactenus egimus : haec enim synthesis exprimit « probabilitates » singulorum eventuum per undas « phantasmata », quae non sunt nisi instrumenta analytica ad computandas varias densitates photonum, et nulla vi physica pollent qua moderentur distributionem photonum.

Caput III

SYNTHESIS CORPUSCULARIS-UNDULATORIA DE NATURA LUCIS IN ORDINE ONTOLOGICO

Articulus I

Natura et munus synthesis ontologicae

34. Necessitas huius synthesis.

Sola synthesis logica, de qua in praecedenti capite egimus, non sufficit ad satis declaranda phaenomena optica.

Soli enim conceptus quantici nihil dicunt de ratione qua photona distribuuntur per spatium, praesertim cum agitur de phaenomenis diffractionis, interferentiae et polarizationis, quae adhuc indigent descriptione undulatoria.

Undae vero, quas synthesis logica associat photonibus, non sunt nisi instrumenta analytica (« undae phantasmata ») quibus computamus et describimus varias distributiones photonum, pro variis adiunctis physicis phaenomenorum; sed nostrae computationes et descriptiones non producunt phaenomena.

Neque, ut iam explicavimus (cfr. 33, d), ad explicandam productionem phaenomenorum opticorum sufficiunt « probabilitates » inveniendi singula photona (prout definiuntur lege statistica undulatoria), copulatae cum « lege grandium numerorum », vi cuius variae densitates collectivae photonum producuntur iuxta ipsas probabilitates phaenomenorum elementarium. Cum enim « probabilitates » illae definitae non sint nisi a posteriori ex effectu collectivo explicando, non conficeretur nisi discursus tautologicus explicans rem explicandam per seipsam.

Admittenda igitur est in re talis natura lucis, quae radix physica sit sive manifestationum energeticarum quanticarum, sive cuiuslibet aspectus undulatorii: haec ipsa natura lucis est synthesis ontologica, de qua in praesenti agimus.

35. Indoles synthesis ontologicae.

a. Fusio duorum aspectum in una re.

Synthesis ontologica, quae rationem reddat de aspectibus tum quanticis tum undulatoriis phaenomenorum opticorum, procul dubio concipienda non est ad instar cuiusdam aggregationis, quae copulet duas distinctas partes, quarum altera sit radix phaenomenorum quanticorum, altera vero radix phaenomenorum undulatoriorum.

Nequeunt enim phaenomena dividi in has duas distinctas series; sed in uno eodemque phaenomeno reperiuntur duo aspectus, etiamsi distingui possint phaenomena, quorum descriptiones (partiales tantum) fiant potius schemate corpusculari, vel potius schemate undulatorio.

Ceterum ipsa definitio photonis ($\varepsilon = h \cdot \nu$) involvit frequentiam ν, quae nota characteristica est motus undulatorii; et quaelibet phaenomena, quae indigent descriptione undulatoria, aspectu energetico non carent; totus autem aspectus energeticus colligitur sub conceptu photonum.

Ex his animadversionibus concludimus naturam lucis esse unam, sed velut poliedricam: aspectus quantici et aspectus undulatorii, quos distinguimus nostris cognitionibus inadaequatis et non propriis, apte comparari possunt cum distinctis proiectionibus unius eiusdemque corporis poliedrici: neutra vero proiectio, seiunctim sumpta, valet ad totam figuram poliedricam repraesentandam.

b. Difficultates contra synthesim ontologicam.

Necessitas synthesis ontologicae non ita intelligenda est perinde ac si fundenda essent in unam naturam illa ipsa schemata, corpuscularia et undulatoria, quibus physica classica seiunctim descripserat phaenomena mechanica et electromagnetica; etenim haec schemata continent nonnulla elementa, quae mutuo se excludunt.

Ex. gr., descriptio maxwelliana undarum electromagneticarum exhibet energiam ut diffusam modo continuo per spatium, et talem quae possit etiam in indefinitum diffundi usque

ad densitates evanescentes ; etiam communicatio energiae inter materiam et aetherem describitur iisdem processibus continuis. Photona vero exhibentur velut granula, quorum energia tota collecta est in uno puncto, et quae (pro definita frequentia ν) nequit descendere infra definitum valorem $\varepsilon = h \cdot \nu$.

Similiter traiectoriae punctorum materialium, quas definiunt schemata mechanicae classicae, nequeunt componi cum phaenomenis diffractionis et interferentiae.

Ob has oppositiones contradictorias, synthesis ontologica passim dicitur impossibilis ; pares difficultates vero, animadvertunt, non impediunt synthesim mere logicam ; quia in ordine logico nulla energia tribuitur undis associatis photonibus, nec definiuntur traiectoriae photonum.

Ad confirmandam absentiam contradictionis in ordine logico, solet etiam adduci « principium complementarietatis », quod Bohr enunciavit : aspectus corpuscularis et aspectus undulatorius energiae radiantis dicuntur aspectus « complementares » quatenus, si alter aspectus distincte consideratur, alter deficit, ita ut numquam simul considerentur ; similiter experimenta, quae vertuntur circa mensuram undulatoriam (ex. gr. ad mensurandam frequentiam ν radiationis in effectu Compton), numquam adhibentur ad simul mensurandum aspectum corpuscularem (ex. gr. impulsum, quem photon communicat electroni).

Sed, si huiusmodi argumenta revera removerent contradictionem in ordine logico, non autem in ordine ontologico, neganda esset ipsa existentia energiae radiantis, utpote intrinsece contradictoria.

c. Recta solutio difficultatis.

Difficultas vero facile solvitur, quia classica schemata corpuscularia et undulatoria complectuntur etiam nonnullas notas, quas phaenomena optica neque ostendunt neque postulant. Si vero seliguntur illae solae notae, corpusculares et undulatoriae, quae experimentis vere comprobantur, hae notae sine ulla contradictione copulari possunt in una eademque re, et de ipsa simul etiam affirmari possunt.

36. Generalia lineamenta synthesis ontologicae.

Synthesis ontologica stat in ipsa natura energiae radiantis, quae talibus proprietatibus pollet ut communis radix sit sive aspectus corpuscularis sive aspectus undulatorii ipsius energiae.

Notae, quae tribuendae sunt energiae radianti ad adumbrandam synthesim ontologicam proprietatum corpuscularium et undulatoriarum, hauriri etiam possunt ex classicis schematibus corpuscularibus et undulatoriis, dummodo attente seligantur eae solae notae, quae experimentis vere comprobatae sunt ; seponendae vero sunt illae notae quae ex aliis phaenomenis analogis desumptae sunt, vel quae nostra ratione elaboratae sunt ad conficiendam quamdam definitam descriptionem phaenomenorum.

a. Notae hauriendae ex schemate undulatorio.

1. Illae notae seligendae sunt, quas reapse comprobarunt varia experimenta ; quae sunt : experimenta de undis stationariis ; congruentiae formularum Fresnel cum phaenomenis interferentiae ; phaenomena polarizationis ; phaenomena interferentiae quae producuntur etiam si lux tenuissima est ; et alia (cfr. n. 25, a).

Haec igitur affirmanda sunt :

— Energia radians consistit in phaenomeno electromagnetico, quod propagatur ipsa velocitate lucis ; phaenomenon absolvitur per phases diversas (quae manifesto apparent saltem cum satis copiosa est quantitas energiae) ; hae phases periodice instaurantur et propagantur ad instar undarum.

— Intensitas energetica (cum agitur de phaenomenis, quorum energia aequivalet plurimis photonibus) ita distribuitur per spatium, ut congruat cum ipsis intensitatibus, quas theoria undulatoria classica collegerat ex hypothesi de energia distributa modo continuo, et quas retulerat ad potentiam secundam amplitudinis undarum.

— Agitur de aspectibus undulatoriis, qui ultimatim resolvi nequeunt in actiones et reactiones inter photona. Ipsi aspectus tandem involvunt proprietates vectoriales, et quosdam pecu-

liares nexus inter distinctas manifestationes energeticas elementares (quos nexus theoria classica exhibebat per cohaerentiam undarum continuarum).

2. Tribuenda vero non est ipsi naturae energiae radiantis illa triplex nota continuitatis, qua theoria classica describit campos electromagneticos, statum energeticum aetheris, mutuationem energiae inter aetherem et materiam (cfr. n. 25, b).

Haec nota pertinet tantum peculiari modo descriptionis : non congruit enim cum manifestationibus energeticis quae fiunt per « quanta » ; quare nequit ipsi rei tribui. Ex alia parte experimenta Hertz, et alia experimenta analoga, vel congruentiae macroscopicae inter formulas Fresnel et varias intensitates illuminationis, non valent ad nobis manifestandam structuram microscopicam energiae radiantis; quare sine ulla difficultate dicta nota continuitatis negari potest.

His non obstantibus, descriptio classica iure retinetur ad phaenomena non microscopica describenda ; et aliquid veri exprimit, ea fere ratione, qua figurae opere musivo expressae iure repraesentari possunt lineamentis continuis : aliquid veri hac ratione reproducitur, quamvis non reproducatur subtilis structura operis musivi.

Notandum.

Manifestationes energeticae per « quanta » postulant quamdam discontinuitatem ; non excludunt vero notam continuitatis intra ipsos fines microscopicos unius photonis. Immo peculiaris unitas et structura photonis involvit expressionem cuiusdam internae continuitatis : photon enim involvit « quantum » actionis, seu productum energiae per tempus, vel quantitatis motus per spatium ; involvit scilicet expressionem cuiusdam continui fluentis.

Argumenta exposita postulant aspectum discretum, seu non continuum, in illa phasi phaenomenorum in qua energia radians absorbetur per « quanta » a materia. Agitur de ipsa phasi in qua energia radians nobis manifestatur : ipsa enim energia nos lateret si non absorberetur a materia. Tamen energia radians creata non est in illo momento temporis ; de eius

vero statu et structura in momento antecedenti non possumus iudicare ex ipsa structura photonum. Fortasse quaedam alia peculiaris nota continuitatis (etsi non eadem quae describitur theoria electromagnetica) competere ei potest : formae, quas energia induere potest, quam plurimae sunt, et non possumus eas delimitare ad formas iam notas.

Neque repugnat energiam exhibere, in quodam momento temporis, quemdam peculiarem aspectum continuum, et illum illico exhuere. Ex. gr., si membrana elastica sphaerica dilatatur, eius status energeticus diffunditur per totam eius extensionem ; si vero acu pungitur in peculiari puncto, eius tensio elastica diffusa statim deficit, et in illo uno puncto producitur peculiaris manifestatio energetica.

Absonum non est ponere in ipso statu energiae radiantis, qui praecedit eius absorptiones per « quanta », fundamentum physicum legis statisticae de distributione photonum.

b. Notae hauriendae ex schemate corpusculari.

1. Emissiones energiae radiantis a materia et eius absorptiones comprobatae sunt fieri per « quanta », quibus competunt nonnullae notae, quae « corpusculares » denominari possunt (cfr. n. 21).

Lineamenta photonum, quae inveniuntur etiam in schemate classico de motu corpusculorum, haec sunt :

— exstat aliquid punctiforme « photon », energia praeditum ($\varepsilon = h \cdot \nu$), cuius modus agendi in corpuscula obtemperat principiis conservationis energiae et conservationis impulsus.

— photoni competit impulsus $\vec{p} = \dfrac{h \cdot \nu}{c}$.

2. Tribuendae vero non sunt photonibus aliae notae schematis corpuscularis classici (cfr. n. 22, a, b, Notandum) ; scilicet:

— massa materialis quiescens ;

— unitates permanentes et consequentes traiectoriae per spatium ; vel saltem illae ipsae traiectoriae, quas definiunt principia mechanicae classicae.

c. Collectio variarum notarum: earum significatio et vis.

Notae, sive undulatoriae sive corpusculares, quae experimentis vere comprobantur, et quae supra recensitae sunt sub paragraphis a, 1 et b, 1, sine ulla contradictione copulari possunt. Contradictio exstaret si copulandae etiam essent notae recensitae sub paragraphis a, 2 et b, 2 ; sed experimenta has notas non postulant, immo excludunt.

Sicut scientia producere non valuit nisi synthesim logicam aspectuum corpuscularis et undulatorii, et nullam interpretationem physicam suis methodis definivit, quae simul explicaret utramque seriem proprietatum, ita nostra synthesis ontologica nonnisi imperfecta est : tantum adumbrat naturam energiae radiantis ; et absolvitur solis generalioribus lineamentis et conceptibus analogicis. Agitur nihilominus de cognitione vera, quae, etsi mere inchoata, plures notas manifestat de energia radianti, et longe perfectior est quam notitia, quam de luce habuerunt Galilaeus, Newton, Huygens, Fresnel, et ipse Maxwell.

Insuper talis synthesis valet ad dissipandum dubium de eius possibilitate ; quod dubium, si serio admitteretur, induceret in idealismum vel in conclusiones agnosticas ; quare momentum philosophicum ei non deest. De hac autem re latius agit sequens articulus.

ARTICULUS II

Aspectus scientificus et aspectus philosophicus synthesis ontologicae.

37. Relationes inter philosophiam et scientias.

Collatio aspectus scientifici et aspectus philosophici nostrae synthesis tangit generaliorem quaestionem de distinctione munerum et de mutuis relationibus inter scientias modernas et philosophiam ; hoc autem problema nimis amplum est, quod possit paucis innui, etiamsi limitaretur ad solam scientiam

physicam et ad cognitionem philosophicam de ipso mundo physico ; neque uno criterio problema recte solvi potest.*

Licet vero nobis has quaestiones non definire ; nostrum enim est ut rem scientificam consideremus prout ponit quamdam quaestionem philosophicam ; quare, utcumque distinguantur ambitus proprii duarum disciplinarum, utrumque campum complectimur ; potius nobis ad hoc attendendum est : ut omnes partes et omnes legitimi aspectus nostrae synthesis, sive ad scientiam referantur sive ad philosophiam, congruenter componantur, sine ulla mutua contradictione.

Talem autem congruentiam dicimus dari tantum si nostris cognitionibus de mundo physico, sive scientificis sive philosophicis, illam significationem et vim agnoscimus, quam realismus moderatus postulat.

38. Realismus moderatus congruenter componit aspectum scientificum et aspectum philosophicum synthesis corpuscularis-undulatoriae.

Hanc congruentiam probant :

a. Fundamentum synthesis ontologicae.

Si realismum moderatum tenemus, non aliam naturam inquirimus energiae radiantis, quam eam quae valeat producere omnia varia phaenomena optica et electromagnetica, et determinare illas varias mensuras, quas physici redigunt in formalem synthesim undulatoriam.

Quare fundamentum synthesis ontologicae complectitur omnes notitias scientifice compertas.

b. Notae, corpusculares et undulatoriae, selectae ad synthesim conficiendam.

Ad normam realismi moderati, distinguendae sunt notae quas experimenta vere ostendunt dari in phaenomenis, et

* Cfr. Selvaggi S. J., *Filosofia delle Scienze,* Civiltà Cattolica ; *Problemi della Fisica Moderna,* Brescia, « La Scuola » - *Atti del IX Convegno del Centro di Studi Filosofici tra Professori Universitari,* Gallarate 1953 : *Il Problema della Scienza* ; Brescia, Morcelliana 1954 - *Communicationes IV Congressus Thomistici Internationalis* (1955) : *Sapientia Aquinatis* 1 Roma, Officium Libri Catholici.

vertit in psychophysicam, quae non recenset nisi nostras subiectivas affectiones sensibiles.

— Neopositivismus profitetur etiam purum empirismum : nullas alias cognitiones de factis admittit nisi eas quas sensibus directe experimur. Munus ratiocinii non aliud est nisi absolvere discursus tautologicos, ad producendas expressiones aptiores, sed aequipollentes, eorumdem factorum empiricorum. Nequit vero nostrum ratiocinium inniti ulli principio generali (ut principio rationis sufficientis, vel causalitatis) vi cuius possit ex quodam facto empirice cognito colligere aliud factum ab illo distinctum.

Huiusmodi principia certe collecta non sunt ex experimentis physicis ; quare iure confutantur argumentis philosophicis. Confutari vero possunt etiam argumentis haustis ex scientia physica, quatenus dantur capita huius scientiae, quae manifesto contradicunt placitis neopositivismi. Cum vero affirmationes neopositivismi sint essentialiter universales et exclusivae, ad illas confutandas sufficit vel unum exemplum contrarium.

Caput physicae, quod peculiari efficacia confutat neopositivismum, constituitur theoria atomica, quae ex cognitionibus empiricis circa nonnulla facta macroscopica collegit cognitionem certam de factis microscopicis, quae directe non videntur : de atomis scilicet, quae ineunt compositionem singularum molecularum.*

Si semel principia neopositivismi confutata sunt, iam nequeunt denuo adduci velut legitima criteria ad interpretanda alia capita scientiae physicae. Non sine utilitate tamen notari potest etiam peculiaris incongruentia inter affirmationes neopositivismi et conclusiones vere scientificas circa structuram energiae radiantis.

Planck ex experimentis circa radiationem nigram collegit necessariam existentiam systematum elementarium (quae non videntur) non obtemperantium principiis classicis, et quae erogarent energiam per « quanta ».

---

* Cfr. Soccorsi : *De cognitione mundi phisici*, Universitas Gregoriana.

Einstein ex notis characteristicis effectus photoëlectrici collegit photona ; experimenta ad confirmandam theoriam vertuntur circa electrona (immo circa vestigia electronum) et conclusiones vertuntur circa structuram energiae radiantis.

Compton ex experimentis, quae directe non ostendunt neque electrona neque photona, collegit eorum proprietates et nominatim impulsum tribuendum photonibus.

Neopositivistae, ut componant has conclusiones scientificas cum suis praeceptis philosophicis, contendunt atomos, electrona, photona et plura alia huiusmodi non esse facta ratiocinio comperta, sed esse nostras subiectivas formulas conventionales, quibus commode colligimus et indicamus plura facta empirica, quae sola cognoscimus.

Sed hae assertiones manifesto detorquent nativam significationem conclusionum scientificarum, neque adstrui possunt quin involvantur aliae sententiae philosophicae, quae cum scientia physica non congruunt (v. paragraphum sequentem).

b. Positivismus temperatus.

Liceat hac denominatione indicare sententiam plurimorum physicorum, qui, non profitentes strictum neopositivismum Scholae Viennensis, sentiunt se suis experimentis et indagationibus contrectare mundum externum, et tamen omnino alieni sunt ab investigationibus de interna evolutione phaenomenorum et structura rerum. Loquuntur quidem de atomis, de electronibus et de ceteris corpusculis, et de photonibus tamquam de rebus plane compertis ; tamen aegre proferunt iudicia de vi nostrarum notionum, quae praetergrediuntur fines cognitionum empiricarum ; et potius, ad instar positivistarum, videntur omnes has notiones habere ut « conventiones ».

Sed physici, si non profitentur strictum subiectivismum neopositivismi et simul sibi constare volunt, necessario admittere debent unam ex sequentibus hypothesibus :

— vel phaenomena empirice comperta (quae mundo externo pertinent) dicuntur produci sub influxu rerum, quae pertinent et ipsae mundo externo (ut atomi, electrona, pho-

tona ...) : quo in casu, tales res non sunt merae conventiones, sed sunt facta indirecte cognita ;

— vel phaenomena mundi externi dicuntur produci nostris ipsis cognitionibus ;

— vel tandem ipsa phaenomena dicuntur produci sine ullo influxu physico, sive ex parte nostrarum cognitionum, sive ex parte rerum quae pertineant mundo externo.

Iamvero :

— prima sententia, quae congruit cum realismo philosophico, plane congruit etiam cum indole investigationis physicae, quae, ex. gr., colligit transitum electronum et definit eorum energiam cineticam ex vestigiis quae ipsa electrona causant ; vel colligit photona ex eorum actionibus in electrona. Agitur autem de interpretatione physica phaenomenorum, quae manet intra fines scientiae physicae et dicenda non est constituere investigationem philosophicam : applicat quidem principium rationis sufficientis ; sed hoc principium, et alia analoga, recensenda sunt inter generalissima principia cognitionis, quae quaelibet scientia suo iure adhibet et applicat.

— aliae vero sententiae non congruunt neque cum significatione neque cum methodis scientiae physicae : numquid nostris cognitionibus creamus energiam atomicam ? vel delendum est a scientia physica principium conservationis energiae ? et plures incongruentiae huiusmodi notari possunt.

Insuper agitur de sententiis, quae non colliguntur ex experimentis scientificis ; quare si physici illas tenent (vel solum ut possibiles admittunt) iam non physicos agunt, sed philosophos ; et talibus sententiis iure opponuntur argumenta philosophica.

Notandum.

Declarandum restat an, non obstante nativa congruentia scientiae physicae cum realismo philosophico, dentur nihilominus argumenta, ex ipsa scientia physica hausta, quae exhibeant ut obiecta conventionum illas causas phaenomenorum, quas directe non experimur. Non sine causa enim physici haec omnia habere possunt ut « conventiones ».

Difficultas bene solvitur, si attendimus ad peculiarem indolem realismi philosophici, qui pluribus de causis dicendus est « realismus moderatus ».

Scientia enim physica de causis phaenomenorum nobis non comparat nisi cognitionem imperfectam : partialem scilicet ; a posteriori declaratam ; analogiis illustratam ; quaedam notae hypothetice et disiunctive affirmantur (vel ipsae stant vel aliae aequipollentes). In his adiunctis, definitiones entium physicorum indirecte cognitorum, si determinata ratione absolvendae sunt, involvunt etiam quamdam conventionem. Quare, si affirmamus existentiam talium entium, disiunctive eam affirmamus : vel existunt prout definita sunt, vel prout sunt in se, modo ceteroquin simili et aequipollenti quoad effectus explicandos.

Hii vero, qui respuunt ut vana commenta conceptus de rebus « prout sunt in se », iam non vident nisi aspectus conventionales, et iam non audent affirmare existentiam rerum definitarum. Sed non scientia physica infert tales haesitationes, sed praeiudicia philosophica.

Scientia physica potius pluribus exemplis illustrat etiam cognitiones imperfectas et analogicas esse veras cognitiones de rebus et de proprietatibus, quae in mundo externo reapse ponendae sunt. Considerentur ex. gr. pristinae notiones de valentiis chimicis, quae nonnisi inchoatae erant et mere analogicae, et tamen referebant veras proprietates atomorum. Atomus Bohr (cfr. partem II, sectionem I) continet pluras cognitiones veras, et tamen illas non exhibet nisi sub formis analogicis. « Principium correspondentiae » Bohr (cfr. nn. 57-58-59) absolvitur mera analogia ; et tamen veras proprietates indicavit.

c. Empirismus — Conventionalismus — Legalismus.

Omnes reliquae interpretationes philosophicae, quae productae sunt et produci possunt de significatione et vi cognitionum physicarum revocari possunt ad empirismum, conventionalismum, legalismum.*

---

* Cfr. Selvaggi S. J. : *Filosofia delle scienze*, Ediz. Civiltà Cattolica.

1. Empirismus. (Hume - Mach - Neopositivistae).

Haec sententia habet omnes cognitiones scientificas et ipsas leges physicas ut meram summam experimentorum praeteritorum. Experimenta futura possunt etiam illis contradicere. Non dantur leges fixae. Nullum factum ratiocinio colligi potest, quod distinguatur a factis directe empirice compertis.

2. Conventionalismus - Conceptualismus. (Le Roy - Poincaré - Bergson - Blondel).

Physici dicuntur ex conventione conficere et eligere schemata conceptualia (seu leges), ad quorum normam facta empirica recensentur et describuntur. Experimenta hanc electionem non determinant. Dantur quidem schemata conceptualia magis vel minus commoda ; sed proprie loquendum non est de eorum veritate, vel falsitate, sicut non datur systemata mensurae alia vera alia falsa.

3. Legalismus.

Ipsa facta experimentis comperta agnoscuntur involvere mutuas relationes, quae sunt leges quas ipsa natura ponit. Sed huiusmodi relationes dicuntur tantum describere externam speciem phaenomenorum et eorum nexus externos ; nullatenus vero censentur explicare ipsa phaenomena, et manifestare eorum causas.

Vitium harum sententiarum stat in earum indole extrema : affirmant scilicet universam scientiam physicam absolvi elementis mere empiricis, conventionalibus, vel descriptionibus mere externis phaenomenorum, et excludunt quamlibet internam intellectionem phaenomenorum et rerum. Quod si haec nota extrema et exclusiva deficit, elementa empirica, conventionalia, et mere extrinsece descriptiva bene consociantur cum realismo moderato (cfr. n. 39, b, Notandum).

Contra omnes et singulas sententias extremas supra recensitas stat argumentum, quo iam probavimus (n. 39, a, b) nos cognoscere nonnullas res mundi externi, quae distinguuntur a factis quae directe experimur, sed quae in ipsa facta influxum physicum exercent. (cfr. et. nn. 72 ; 94, a ; 98).

Speciatim notandum est totam physicam quanticam constituere praeclarum argumentum contra quemlibet conventionalismum, et a fortiori contra quemlibet conceptualismum et subiectivismum. Physica enim classica iam construxerat eximia schemata theorica, miro modo elaborata, quibus utebatur ad describenda innumera phaenomena ; tamen haec ipsa schemata comprobata sunt inepta ad describenda microphysicam, sive mechanicam sive energiae radiantis. Non ad libitum igitur confici possunt schemata conceptualia, ad quae semper fas erit referre descriptionem phaenomenorum ; sed nostri conceptus necessario conformandi sunt ad naturam rerum.

Articulus III

De determinismo vel non determinismo in microphaenomenis energiae radiantis.

40. De origine quaestionis.

Haec quaestio non respicit sola microphaenomena energiae radiantis, sed praecipue microphaenomena mechanica ; quare de ea latius agemus in altera parte ; interim notamus quasdam animadversiones fundamentales, quae valent ad recte declarandum sensum quaestionis, ita ut vitentur fictae controversiae meris aequivocationibus innixae.

Origo quaestionis non stat in mera indole statistica novae physicae ; generatim enim leges statisticae optime componi possunt cum pleno determinismo phaenomenorum : sufficit ut non considerentur omnia parametra quae determinant evolutionem phaenomenorum, ut necessario deveniendum sit ad descriptiones mere statisticas. Sed leges statisticae physicae quanticae exhibent peculiares notas et praerogativas (quas in parte secunda magis declarabimus) :

— indoles mere probabilistica novae physicae dicenda est generalis et essentialis : sequitur enim ipsa generaliora principia huius physicae ;

— descriptiones statisticae colliguntur ex positivis notitiis quas habemus de microphaenomenis, et non quia negliguntur

parametra quae possent ipsas descriptiones magis perficere et determinare ;

— solae leges probabilisticae valuerunt congruenter describere microphaenomena ; dum physica classica, applicando plenum determinismum phaenomenorum, problema solvere non potuit.

Posita propterea est quaestio an par structura mere probabilistica competat ipsis phaenomenis : evolutio scilicet singulorum phaenomenorum elementarium dicitur fortasse non regi legibus rigidis et plene determinantibus, sed meris probabilitatibus ; ordo autem macroscopicus nonnisi statisticus est.

Haec hypothesis exagitavit non paucas controversias.

Videbantur obstare nonnullae sententiae philosophicae : non solum eae, quae ut unum idemque habebant causalitatem phaenomenorum et eorum determinismum ; sed etiam sententia scholastica, quae tunc solum admittit causas non determinatas ad unum, cum agentia pollent cognitione intellectiva.

Obstabat ipsa scientia classica, quae ratione determinata et determinante descripserat phaenomena, et quae iam visa erat satis comprobata.

Controversiae adhuc protrahuntur ; sed etiam nonnullae aequivocationes videntur eas alere.

41. Diversa subiecta, de quibus agunt philosophia et scientia physica, cum altera affirmat actiones determinatas ad unum et altera indeterminismum physicum.

a. Sententia philosophica de actionibus determinatis ad unum.

Consideramus in praesenti solam philosophiam scholasticam, cuius sententiam de hac re censemus retinendam esse ; negligimus vero alias sententias philosophicas, quae contendunt colligere necessarium determinismum physicum ex erratis principiis idealismi vel materialismi.

Philosophia scholastica, considerans actiones liberas hominum, quaerit quo pacto dari possint actiones quae non determinentur ad unum propter ipsas determinatas perfectiones subiecti agentis ; concludit vero cognitionem intellectivam esse necessariam ; quare etiam asserit omnia entia, quae quavis

cognitione carent (qualia sunt agentia mere physica) determinata esse ad unum in suis actionibus.

Plura declaranda sunt ut recte intelligatur et delimitetur significatio huius thesis.

Quaelibet actiones, sive determinatae sive non determinatae ad unum, semper referuntur ad subiecta quae agunt: « actiones sunt suppositorum ». Subiecta autem agentia non sunt quaelibet peculiares proprietates quae partem aliquam habent in actionibus ; sed sunt supposita substantialia, quae tali modo agunt pro proprietatibus quibus pollent.

Ipsa agentia ponuntur praedita omnibus proprietatibus et subsidiis quorum gratia valent actionem producere ; secus iam non ageretur de entibus determinatis vel non determinatis ad unum, sed de entibus quae agere non possunt.

Dicta condicione posita, agentia determinata ad unum ea sunt quae, cum primo pollent omnibus subsidiis necessariis ad agendum, nequeunt non agere, et necessario agunt tali determinato modo. Agentia vero non determinata ad unum ea sunt quae, instructa omnibus proprietatibus et subsidiis necessariis et sufficientibus ad agendum, non coguntur ad actionem pro ipsis proprietatibus quibus pollent, sed recensent inter suas proprietates etiam peculiarem potestatem sive agendi sive non agendi, vel etiam agendi tali aut tali modo.

Talis simultanea potestas agendi vel non agendi, agendi tali vel tali modo, censenda est positiva proprietas, vi cuius agens potest determinare suam actionem ; si enim agens, etsi non coacte, reapse agit et tali modo agit, nequit non dari positiva ratio sufficiens huius determinationis ; secus haberetur quaedam determinatio quae produceretur sine ullo influxu ; sed si quid sine ullo alieno influxu ponitur existere, iam non est aliquid quod producitur, quia existit vi suae naturae et non potest non existere.

Iamvero, si admittitur cognitio intellectiva, facultas illa electiva, libere determinans actiones, rite explicatur ; et talem facultatem nos ipsi experimur (cfr. psychologiam).

Si vero excluditur cognitio (neque opus est in praesenti ut distinguatur cognitio intellectiva vel non intellectiva), ele-

mentum quod reapse determinat actiones necessario est quaedam intrinseca proprietas physica quae afficit agens; et sic reincidimus in agens cuius actiones determinantur vi proprietatibus physicis quibus pollet. Essentiale discrimen inter communes proprietates physicas et cognitionem in hoc stat: communes proprietates physicae non sunt nisi perfectiones quae intrinsece afficiunt et perficiunt subiectum agens; actus vero cognoscitivi, praeter suum aspectum psychologicum, cuius gratia afficiunt et perficiunt subiectum cognoscens, exhibent alium aspectum (qui « intentionalis » dicitur), vi cuius obiecta cognoscuntur, et subiectum cognoscens fit plura (modo illo peculiari — seu intentionali — qui proprius est cognitionum); quare, vi cognitionis, subiectum cognoscens induit pluras alienas perfectiones quae appeti possunt et quae in causa sunt si actiones iam non determinantur ad unum terminum.

En igitur conclusio ex dictis colligenda et prae oculis retinenda: philosophia scholastica, cum asserit agentia mere physica (quavis cognitione destituta) esse determinata ad unum in suis actionibus, loquitur de individuis substantialibus, prout instructa sunt omnibus perfectionibus necessariis et sufficientibus ad agendum.

b. Assertiones scientificae de indeterminismo physico.

Scientia physica, asserens indeterminismum mundi physici, dicit deesse nexum determinatum inter nonnullas notas, quibus describuntur status physici antecedentes cuiusdam systematis et status subsequentes eiusdem systematis. Notae autem, quae adhibentur ad ipsos status physicos describendos, eae sunt quae experimentis mensurari possunt.

Aequipollenti ratione, quaestio de determinismo vel non determinismo mundi physici, ita solet exprimi: an notae characteristicae, quibus exhibentur status physici antecedentes cuiusdam definiti systematis, valeant necne ad plene definiendam totam subsequentem evolutionem eiusdem systematis.

Patet non agi de iisdem subiectis, de quibus loquitur exposita sententia philosophica.

Ex. gr., si de phaenomenis interferentialibus agitur, elementa characteristica antecedentia sunt: fons lucis punctiformis, vel ad instar subtilissimae laminae luminosae; dimensiones et distantiae relativae nonnullorum foraminum, vel obstaculorum; nonnulla peculiaria adiuncta, quorum gratia radiationes pollent illis proprietatibus, quas interpretatio classica referebat ad « cohaerentiam » undarum interferentium. Ad describendum vero phaenomenon opticum finale adhibentur: variae intensitates luminosae, quae referuntur ad varias densitates photonum. Singula photona habentur ut finales manifestationes energeticae. Ignoratur, et certe non perpenditur status energeticus intermedius inter irradiationem lucis et productionem fimbrium interferentialium.

Analoga exempla praebet theoria quantica de structura materiae (cfr. partem II: nn. 100, 101).

Ad significandas res diversas apte adhibentur locutiones diversae; quare diximus philosophiam agere de « determinatione ad unum entium physicorum », et quaestionem scientificam agere « de determinismo vel non determinismo mundi physici ».

Examinandum restat an sententia philosophica et quaestio scientifica, quamvis directe agant de rebus diversis, indirecte tamen possint mutuo se excludere. Responsio autem est negativa.

42. Sententia philosophica « de entibus determinatis ad unum » et thesis scientifica « de indeterminismo mundi physici » nequeunt indirecte mutuo se excludere.

a. Mutua exclusio propositionum nequit colligi ex sententia philosophica.

Ex determinatione ad unum entium physicorum ad summum generatim conicere possumus inter nonnullas proprietates physicas non deesse nexus necessarios; sed nequeunt certe a priori definiri ubinam tales nexus inveniantur; eo magis quia valde reconditae sunt internae naturae quae subsunt sive phaenomenis energiae radiantis, sive phaenomenis micromechanicis.

Nonnisi a posteriori, ex. gr., certiores facti sumus de illis nexibus determinatis quos manifestant effectus photoëlectricus

(inter frequentiam radiationum et energiam cineticam electronum), vel effectus Compton (ad relationes quod attinet inter impulsus photonum et impulsus electronum).

b. Mutua exclusio propositionum nequit colligi ex sententia scientifica.

Illatio verteretur manifesto extra ambitum proprietatum, quas scientia physica perpendit.

Ad excludendam illam determinationem ad unum, quam sententia philosophica postulat, mensurae physicae deberent penetrare, usque ad eorum esse substantiale, omnia entia quae partem aliquam habent in phaenomenis, et illa referre deberent modo adaequato et lineamentis propriis, ita ut nihil detur in re quod non exhibeatur per expressionem scientificam phaenomeni; et, in talibus adiunctis, mensurae deberent detegere nexus non determinatos in evolutione phaenomenorum, quamvis omnia parametra et adiuncta perpendissent.

Iamvero non tales sunt descriptiones scientiae physicae: scimus contra quam inadaequatae et impropriae sint. Nominatim, ad energiam radiantem quod attinent, plurima nos latent, vel lineamentis non propriis exhibentur:

— natura propria photonum aenigma manet; nescimus an ipsis competant unitates permanentes, vel, in phasibus quae immediate praecedunt manifestationes photonum, ipsi energiae radianti forma diversa competat; nos latet significatio frequentiae quae includitur in definitione energetica photonum;

— proprietas, quam theoria classica interpretata est per « cohaerentiam undarum », est quaedam proprietas physica quae in phaenomena influit; in definitis enim adiunctis deficit, ita ut phaenomena interferentiae non iam producantur; tamen descriptio photonis hanc proprietatem non involvit. Theoria quantica servat quidem notam « cohaerentiae » in undis, quibus computat densitates photonum; sed tales undae exhuerunt suam significationem physicam et non sunt nisi instrumenta analytica ad computationes perficiendas; quare non exprimunt ipsam naturam rerum et proprietatum;

— « probabilitates », tribuendae singulis photonibus, non aestimantur nisi quantitative a posteriori (ex densitatibus veris plurimorum photonum in phaenomenis collectivis); sed talis definitio nullatenus exprimit evolutionem physicam singulorum eventuum elementarium;

— irradiationibus electromagneticis competunt proprietates vectoriales (quas theoria classica exprimit tensionibus electricis et magneticis; et quas experimenta confirmant); tamen definitio photonum has proprietates non involvunt; quare, alia de causa, deficit descriptio adaequata et propria rei physicae.

Quaeras an nexus mere probabiles, quos theoria scientifica deprehendit inter quasdam notas, tales sint, qui aegre componi possint cum « determinatione ad unum » sententiae philosophicae.

Responsio est negativa: non enim aspectus statistici phaenomenorum relinquunt omnia indeterminata; immo potius praestant notae et relationes plane determinatae.

Ad energiam radiantem quod attinet:

— hypothesis fundamentalis Planck involvit definitionem minutissimi « quanti » elementaris actionis h; « actio » autem exprimit quamdam evolutionem phaenomenorum. Ipsa hypothesis Planck postulat determinatos processus irradiationis, qui fieri nequeunt nisi per definita « quanta » energiae.

— effectus photoëlectricus et effectus Compton exhibent aspectus plane determinatos (qui exprimuntur ipsis legibus classicis) quoad conservationem energiae et impulsus in singulis eventibus elementaribus.

— ipsa lex statistica de distributione photonum tota conformata est (a posteriori) cum determinatis formis, quas exhibent phaenomena collectiva; agitur insuper de phaenomenis quae (etsi dicuntur macroscopica, quatenus constant plurimis photonibus) etiam microscopica et minutissima sunt.

Analoga exempla praebet etiam theoria quantica de structura materiae (cfr. partem II: n. 92, c).

APPENDIX
DE DUALISMO CORPUSCULARI-UNDULATORIO

A

43. Undae associatae corpusculis.

Duo aspectus phaenomenorum opticorum, alter undulatorius alter corpuscularis, qui primo visi erant antithetici et tales qui aegre componi possent, magis ac magis se exhibuerunt notas complementares, quarum altera alteram infert ; etiam phaenomena mechanica hos duos aspectus manifestarunt.

Anno 1924 De Broglie suam famosam thesım produxit, qua primum fundamentum iecit mechanicae undulatoriae.

Methodo mere theorica, analogiam evolvit inter phaenomena optica et phaenomena mechanica corpusculorum.

In phaenomenis opticis aspectus corpuscularis, qui photonibus exprimitur, non refert totam naturam rei ; quare photonibus associandae sunt undae, quae definiunt distributionem photonum, nominatim in phaenomenis diffractionis et interferentiae. Haec ipsa phaenomena, suis alternis lineis claris et obscuris, non solum manifestant quemdam aspectum undulatorium phaenomeni, sed etiam sinunt mensuram experimentalem longitudinis undae.

In phaenomenis mechanicis corpusculorum eminent in primis aspectus corpusculares ; considerantur scilicet : massa m corpusculi — eius quantitas motus, seu impulsus $p = m \cdot v$ — energia cinetica $\frac{1}{2} m v^2$ — energia potentialis, quae pendet ex natura et intensitate virium (gravitationalium, electricarum ...) illius campi in quo corpusculum invenitur et movetur.

De Broglie associavit his aspectibus corpuscularibus etiam aspectum undulatorium : considerationibus theoricis ductus, definivit longitudinem λ undarum, quae associandae sunt singulis corpusculis ; quae longitudo varia est pro varia quantitate motus corpusculi :

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{p} \qquad [p = \text{quantitas motus}]$$

Notanda est analogia cum longitudine undae lucis :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

Cum enim photonibus competat etiam quaedam quantitas motus, quae definita relatione nectitur cum frequentia ν, scilicet :

$$p = \frac{h \cdot \nu}{c} \qquad \nu = \frac{c \cdot p}{h}$$

scribere possumus, etiam pro undis lucis :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c \cdot h}{c \cdot p} = \frac{h}{p}$$

Existuntne reapse hae undae associatae corpusculis materialibus ? vel saltem exprimuntne hae undae quemdam verum aspectum undulatorium motus mechanici, qui comparari possit cum aspectu undulatorio phaenomeni optici ?

Experimenta facta sunt ad talem aspectum undulatorium detegendum. Si reapse stat analogia inter phaenomenon mechanicum et phaenomenon opticum, experimenta idonea ad detegendum aspectum undulatorium in motu corpusculorum, duabus sequentibus condicionibus obtemperare debent :

1. Producendum est phaenomenon, cui respondeat una longitudo undae bene definita.

Etenim, radiationes luminosae magis perspicue producunt phaenomena interferentialia cum adhibetur lux monochromatica ; in his adiunctis facile etiam colligitur mensura experimentalis longitudinis undae.

Quare, si de radiationibus corpuscularibus agitur (ex. gr. de fasciculo electronum), cum definita longitudo undae respondeat uni definitae velocitati corpusculi, curandum est ut omnia et singula corpuscula acquirant parem velocitatem ; quod practice obtinetur tantum si attinguntur velocitates satis altae : si experimenta fiunt circa electrona, haec corpuscula valde acceleranda sunt per campum electricum.

Consequenter longitudo undae associatae (pro alta velocitate corpusculi) valde parva est : eiusdem ordinis quam longitudo undarum radiorum X.

2. Radiatio corpuscularis, sicut analoga radiatio luminosa, deducenda est per subtilissimas fexuras, quarum dimensiones eiusdem ordinis sint quam longitudo undae.

Consequens est ut, ad producenda (si fieri possunt) phaenomena diffractionis electronicae, adhibendae sint illae ipsae subtilissimae structurae crystallorum, quae aptae sunt ad producendas diffractiones radiorum X, sicut experti sunt Laue et Bragg.

Davisson et Germer, applicando sive methodum Laue sive methodum Bragg, adhibuerunt non iam radios X, sed fasciculum electronum ; et ex utrisque experimentis collegerunt miram confirmationem undarum De Broglie.

Non solum compertum est reapse produci, per alternas vices, varias densitates electronum ; sed phaenomena (quae accuratae analysi subici possunt sicut fimbriae diffractionis undarum lucis) sinunt etiam mensuram experimentalem longitudinis undae. Collectae autem sunt eaedem longitudines quas De Broglie definiverat, et quae definitum nexum habent cum velocitate electronum ($\lambda = h/m \cdot v$).

Accesserunt etiam alia experimenta, quae Thomson et Rupp perfecerunt applicando methodum, qua Debye et Scerrer usi erant ad analysim instituendam de structuris crystallinis adhibendo radios X.

« Undae De Broglie » admittendae igitur sunt vi argumentorum experimentalium, etiamsi non consideretur methodus theorica qua De Broglie eas definiverat.

Colligitur ex dictis perspicua analogia inter photona et electrona.

Tum photona tum electrona exhibent aspectum corpuscularem; neutra vero reguntur classica lege mechanica de motu puncti materialis ; lex undulatoria (statistica) definit eorum densitates (vel densitates probabilitatis inveniendi singula photona vel electrona).

Non desunt qui, propter hanc analogiam formalem, habeant et exhibeant ut omnino paria utraque phaenomena diffractionis, sive opticae sive electronicae : pariter exhibendo velut corpuscula, tum electrona tum photona ; nonnisi casui, animadvertunt, adscribendum est si lux prius nobis manifestavit suum aspectum undulatorium, et electrona prius manifestaverunt suum aspectum corpuscularem : utrisque pariter competunt utrique aspectus.

Non obstante vero manifesta analogia, stant et prae oculis habenda sunt discrimina inter photona et electrona (cfr. nn. 22; 84 b).

B

44. Analogia inter opticam et mechanicam in physica classica.

a. Conspectus nonnullarum analogiarum.

Duplex aspectus, corpuscularis et undulatorius, qui competit sive phaenomenis opticis sive motui mechanico corpusculorum, indicat manifestam analogiam inter opticam et mechanicam ; sed haec est nova analogia, quam physica quantica in lucem tulit, et non ea, quam physica classica iam exhibuerat, et quae in praesenti declaranda est.

Utraque analogia indicatur in sequenti tabella, quae comparat binos tractatus analogos opticae et mechanicae:

		Tractatus	
		Opticae	Mechanicae
phaenomena	macroscopica :	Optica geometrica	Mechanica classica
	microscopica :	Optica physica	Mechanica undulatoria

Optica geometrica et mechanica classica apte describunt phaenomena macroscopica ; ad describenda vero phaenomena microscopica requiruntur optica physica et mechanica undulatoria (de qua De Broglie prima lineamenta posuit).

Insuper duae descriptiones macroscopicae perficiuntur lineamentis quae perspicuam similitudinem exhibent inter se : in hac similitudine stat analogia quam physica classica iam declaraverat.

Etiam duae descriptiones microscopicae similitudinem exhibent inter se ; haec est nova analogia, quam physica quantica evolvit, et de qua agemus in secunda parte tractationis.

Has omnes analogias iam indicant ipsa generaliora lineamenta singulorum tractatuum.

Optica geometrica.

Haec pars opticae habet radios ut lineas simplices, quae rectae sunt per media homogenea, et quae obnoxiae sunt solis legibus reflexionibus et refractionis ; ex his principiis optica geometrica colligit regulas quibus efformantur immagines, sive per proiectiones, sive si adhibentur specula vel lenticulae.

Haec descriptio non est nisi macroscopica : bene enim refert phaenomena optica usquedum non agitur de his phaenomenis (diffractionis — interferentiae) in quibus intersunt fexurae, foramina, obstacula ... quorum dimensiones comparari possunt cum longitudine undae.

Optica physica.

Optica physica (quae etiam undulatoria est) applicanda est in adiunctis nuper dictis, in quibus sempliciores descriptiones opticae geometricae prorsus deficiunt.

Mechanica classica.

Non consideramus nisi elementares leges de motu puncti materialis, seu cuiusdam massae m quae practice habetur ut tota collecta in uno puncto.

Iuxta has leges, traiectoriae puncti materialis sunt lineae simplices ; sunt autem lineae rectae si energiae potentiali competit valor constans : tunc enim, nullae vires exstant quae, applicatae puncto materiali, illi conferant quamdam accelerationem. Pauca principia regunt motum puncti materialis : tota evolutio eius traiectoriae definiri potest dummodo cognoscantur initialis ubicatio puncti, eius initialis impulsus, et campus virium per quem traiectoria evolvitur. Notanda est peculiaris proprietas nonnullorum camporum virium naturalium, sive mechanicos (gravitationis) sive electricos : datur scilicet quaedam peculiaris functio loci, quae « potentialis » denominatur, cui competunt definiti valores pro variis punctis campi, et cuius gradationes definiunt vires campi : ea ratione qua declivitas soli, suis variis gradationibus determinat varias vires, quae aquam soli ad imum deducunt maiori vel minori impetu.

Mechanica undulatoria.

Descriptio, quam de motu puncti materialis exhibet mechanica classica, non est nisi macroscopica ; ut probarunt phaenomena diffractionis corpuscularis.

Non minus quam simpliciores leges opticae geometricae, etiam simpliciores leges mechanicae classicae impares fiunt ad describenda phaenomena in quibus intersunt systemata quorum dimensiones comparari possunt cum longitudine undarum lucis vel radiorum X. « Micromechanica » autem etiam « undulatoria » est, sicut optica physica.

Physica classica notaverat analogiam inter opticam geometricam et mechanicam puncti materialis, non iam quatenus utraeque descriptiones sunt mere macroscopicae, sed quatenus simillima sunt principia, optica et mechanica, quae regunt traiectorias puncti materialis. Haec analogia in praesenti exponenda est.

b. Principium Fermat et Principium Hamilton.

Haec duo principia, alterum opticum alterum mechanicum, ad quorum normam evolvuntur radii lucis et traiectoriae materiales, analoga formula mathematica exprimuntur : utraque enim enunciant legem cuiusdam summae oeconomiae : scilicet phaenomena ita evolvuntur ut fiat minimum dispendium « temporis » (si de progressu lucis agitur) vel « actionis » si de traiectoria puncti materialis agitur).

Principium minimi temporis (FERMAT).

Radius lucis, transiens a puncto A ad punctum B, illam traiectoriam sequitur, quae sinit minimum dispendium temporis.

Si medium est homogeneum, velocitas lucis est unifor-

mis, et traiectoria « minimi temporis » est ipsa traiectoria « minimae extensionis » (seu linea recta) : tempus enim insumendum proportionem fixam habet cum ipso intervallo spatii percurrendi : quare tunc tempus fit minimum cum minimum fit spatium.

Si medium non est homogeneum (exhibet scilicet varium indicem refractionis) radius non iam recta pergit : si index refractionis abrupte mutatur (propter continguitatem duorum mediorum diversorum) directio radii abrupte frangitur, et producitur elementare phaenomenon refractionis ; si vero index refractionis variatur modo continuo, etiam radius modo continuo curvatur.

Sub utraque forma phaenomenon refractionis regitur principio minimi temporis.

Consideremus enim singula intervalla infinitesima ds spatii percurrendi, et relativa intervalla infinitesima dt temporis, necessaria ad ipsa spatia percurrenda.*

Tempusculum dt, si ex una parte augetur (ratione directa) una cum spatio ds percurrendo, ex alia parte (ratione inversa) minuitur pro maiori velocitate u ; nam, pro certo intervallo temporis dt, spatium percursum est $ds = u \cdot dt$, et tempus necessarium ad percurrendum ipsum spatium ds est $dt = ds/u$.

Quare, ut servetur lex minimi temporis, minima debet esse non iam summa omnium spatiorum elementarium ds, sed « summa integralis » omnium addendorum $dt = ds/u$ inter extrema A et B ; haec summa integralis elementorum infinitesimorum, iuxta annotationes proprias calculi infinitesimalis, exprimitur symbolo $\int_A^B dt$.

Ipsa summa integralis potest aliter etiam scribi : index refractionis n, proprius cuiusdam medii, definitum nexum

* Analysis phaenomeni debet distinguere singula intervalla infinitesima ds et dt, quia, si index refractionis n variatur modo continuo, etiam velocitas u lucis variatur modo continuo ; quare velocitati u non possumus tribuere valorem definitum nisi per intervallum infinitesimum, evanescens.

habet cum velocitate lucis c per vacuum et velocitate u per medium de quo agitur ; stant enim aequalitates $n = c/u$, $u = c/n$; quare dicti addendi infinitesimi possunt scribi $dt = n/c \cdot ds$. Factor constans c potest etiam negligi : cum enim sit constans, pari ratione afficit singulos addendos ; quare quoties (iuxta certam traiectoriam inter A et B) minima fit summa integralis addendorum $n/c \cdot ds$, necessario etiam minima fit summa addendorum $n \cdot ds$, et vicissim.

En igitur variae expressiones, quae tribui possunt illi summae integrali quae minima debet esse iuxta naturalem traiectoriam radii inter puncta A et B :

$$\int_A^B dt \qquad \int_A^B 1/u \cdot ds \qquad \int_A^B n/c \cdot ds \qquad \int_A^B n \cdot ds$$

Notemus etiam (ad instar scripturae mere symbolicae cuius gratia paucis signis poterimus commode exprimere et in memoriam reducere complexiorem propositionem) quasdam aequalitates quae colliguntur quoties condicio minimi temporis servata est : in his adiunctis (ut calculus infinitesimalis docet) nulla debet esse quaedam peculiaris « differentia » (quae est quaedam « differentia partialis », quae propterea denominatur simpliciter « differentialis » et notatur littera δ) quae colligitur si comparatur summa integralis temporum elementarium dt, iuxta traiectoriam naturalem inter A et B, cum summa integrali temporum dt quae necessaria essent ad percurrendam quamlibet aliam traiectoriam (inter ipsa extrema A et B), quae a naturali traiectoria discrepet variationibus infinitesimis.

Lex igitur minimi temporis, quae definit formam radiorum lucis per medium cuius index refractionis n notus sit pro singulis punctis, scribitur :

$$\delta \int_A^B dt = \delta \int_A^B n \cdot ds = 0$$

Principium minimae actionis (HAMILTON)

Punctum materiale, quod transeat a puncto A ad punctum B, illam traiectoriam naturaliter percurrit, quae sinit minimum dispendium « actionis ».

« Actio » est illa magnitudo physica, quae constat producto energiae per tempus ; vel (quod ad idem redit) producto quantitatis motus per spatium percursum. Agitur de magnitudine fluenti quae evolvitur per tempus et per spatium.

Si agitur de puncto materiali m, eius quantitas motus est $m \cdot v$; quare eius « actio », per quemdam spatium elementare ds, est $mv \cdot ds$.

Principium igitur minimae actionis postulat ut corpusculum « naturaliter » (i. e. : cum non obstant ictus vel impedimenta) percurrat illam traiectoriam, inter A et B, quae minimam reddit summam integralem omnium « actionum » elementarium :

$$\int_A^B mv \cdot ds$$

Quae condicio servatur, ut iam expositum est, si nulla fit quaedam peculiaris « differentia partialis » (« differentialis » denominata) inter valorem minimum, quem « actio » assequitur iuxta traiectoriam naturalem, et valores aliquatenus auctos, qui componerentur iuxta traiectorias aliquatenus variatas ; scilicet :

$$\delta \int_A^B mv \cdot ds = 0$$

Aequipollentes expressiones ipsius principii obtinentur si « actio » exprimitur producto energiae per tempus.

Si per campum, quem corpusculum percurrit, nullae vires naturales adsunt quae agant in corpusculum (ut vires gravitationales, vel vires electricae si agitur de corpusculo electricitate praedito), motus fit rectilineus et uniformis, ut postulat principium inertiae. Quod etiam congruit cum principio « minimae actionis » ; etenim : cum quantitas motus mv sit constanter eadem, linea « minima actionis » necessario est ipsa linea « minimae extensionis », seu linea recta.

Si vero in campo, per quem traiectoria corpusculi evolvitur, exstant vires quae agunt in corpusculum, motus iam non ma-

net uniformis, sed acceleratur ; mutari potest ipsa directio traiectoriae. Iamvero, etiam in his adiunctis, principium « minimae actionis » moderatur motum corpusculi, et definit eius traiectoriam.

Patet analogia cum phaenomeno optico.

Radius lucis sequitur lineam rectam velocitate uniformi quoties medium est homogeneum, quatenus « index refractionis » n est ubique idem ; si vero n variatur, variatur velocitas u lucis ($u = c/n$), vel etiam directio radii.

Si agitur de motu puncti materialis, pro « indice refractionis » stat « energia potentialis », quae analoga ratione influit in traiectoriam.

Si, per quemdam campum, energia potentialis corpusculi est ubique eadem, motus naturalis corpusculi est necessario uniformis : variari enim nequit velocitas nisi varietur energia cinetica ; haec autem, si naturaliter variaretur, postularet simultaneam variationem etiam energiae potentialis (summa enim duarum energiarum — propter principium conservationis energiae — eadem permanet). Aliis verbis : sola gradatio energiae potentialis (quae diversa sit de loco in locum) secumfert illas vires, quae naturaliter agunt in corpusculum et ei tribuunt quamdam accelerationem.

Expressio mathematica principii « minimae actionis » facile transformatur, ita ut explicite appareat eius nexus cum energia potentiali.

Si litterae T, E, U denotant energiam cineticam corpusculi, eius energiam totalem, et eius energiam potentialem, manifesto stant sequentes aequalitates :

$$m \cdot v = \sqrt{m^2 \cdot v^2} = \sqrt{2\,m\,\tfrac{1}{2}\,m \cdot v^2}$$
$$= \sqrt{2\,m \cdot T} = \sqrt{2\,m\,(E - U)}$$

quare :

$$\delta \int_A^B mv \cdot ds = \delta \int_A^B \sqrt{2\,m\,(E - U)}\,ds = 0$$

Comparentur duo principia.

minimi temporis	**minimae actionis**
$\delta \int_A^B n \cdot ds = 0$	$\delta \int_A^B \sqrt{2\,m\,(E - U)} = 0$

Patet analogia:

si supponimus tales esse distributiones per spatium indicis refractionis n phaenomeni optici, et energiae potentialis U phaenomeni mechanici, ita ut, pro singulis punctis spatii, stet aequalitas :

$$n = \sqrt{2m\,(E - U)}$$

duas leges definiunt easdem omnino traiectorias ; altera lex pro radio lucis ; altera lex pro corpusculo.

Aliis verbis, aequationes opticae geometricae vertuntur in aequationes (classicas) de motu corpusculorum, si pro « indice refractionis » ponitur quaedam apta « expressio mechanica », quae essentialiter involvit energiam potentialem corpusculi.

c. Analogia classica optica-mechanica et methodus ad condendam novam micromechanicam.

De nova micromechanica agemus in parte II ; iuverit hic adnotasse peculiare criterium, quod Schrödinger collegit ex ipsa analogia classica inter opticam et mechanicam.

Schrödinger supposuit eamdem relationem, quae refert ad invicem aequationes opticae geometricae et aequationes mechanicae classicae (quae utraeque aptae sunt ad sola phaenomena macroscopica describenda), referre etiam ad invicem aequationes opticae physicae (aptas ad describenda microphaenomena optica) et novam mechanicam, aptam ad describenda systemata microscopica. Et sicut aequationes opticae physicae sunt undulatoriae, ita nova mechanica etiam mechanica-undulatoria est.

Ut iam exposuimus, aequationes opticae geometricae vertuntur in aequationes mechanicas (classicas) si, pro indice refractionis n, ponitur expressio mechanica $\sqrt{2m\,(E - U)}$.

Haec autem expressio potest etiam ad libitum poni sub generaliori forma $C\sqrt{E - U}$, in qua C denotet quemdam valorem constantem, qui idem sit in omnibus punctis spatii. In expressione, qua iam usi sumus, valor tributus coëfficienti C est $\sqrt{2\,m}$; sed, etiamsi ponatur alius valor (constans vero respectu variorum punctorum spatii) eaedem traiectoriae colliguntur ; cum enim agatur de valore constanti, omnes variae summae integrales pariter assequuntur valores minimos iuxta easdem traiectorias.

Iamvero Schrödinger, ad apte statuendam suam mechanicam undulatoriam, peculiarem expressionem tribuit coëfficienti C, ita ut simul obtemperaret nonnullis aliis necessariis condicionibus (de quibus dein dicemus), quas nova physica quantica postulabat.

PARS SECUNDA

De physica quantica et de structura atomorum

SECTIO I

THEORIA QUANTICA SEMICLASSICA

CAPUT I

PRISTINA THEORIA BOHR-SOMMERFELD DE ATOMO HYDROGENII

ARTICULUS I

Fundamentalia Lineamenta Theoriae Bohr.

45. Problema solvendum de structura atomorum.

Exeunte saeculo XIX et ineunte saeculo XX, phaenomena radioactiva manifestaverant internam constitutionem electricam atomorum : ex atomis enim emanabant radiationes α, β, γ, quae constituuntur particulis electricis positivis, negativis, et radiationibus electromagneticis.

Tunc ipsa natura electrica atomorum apparuit ut indubius fons radiationum lucis et radiorum X, quorum natura electromagnetica iam satis comprobata erat.

Insuper theoria electromagnetica Maxwell, visa est praebere adaequatum instrumentum ad plenius indagandam internam structuram atomorum. Etenim, iuxta hanc theoriam, causae quae excitant undas electromagneticas sunt motus electrici oscillantes ; excogitandi igitur erant tales interni motus electrici atomorum, qui apti essent ad excitandas illas radiationes electromagneticas, e variis elementis emissas, quibus competunt definitae frequentiae.

Analysis spectroscopica radiationum iam collegerat plurima data experimentalia circa frequentias proprias elementorum ; cum his datis comparandae erant hypotheses conficiendae de structura ipsarum atomorum : frequentiae radiationum theo-

retice praevisae congruere debebant cum frequentiis empirice compertis.

46. Hypotheses quae iam adumbratae erant.

a. Hypothesis Thomson.

Anno 1902, Thomson primam hypothesim emiserat de structura electrica atomorum : atomum conceperat velut sphaeram electricitate positiva plenam, in qua electrona (onera negativa) mergerentur ad instar pulvisculi in guttula aquae. Prout analysis huius systematis ostendit, electrona occupare debebant definita puncta, sub aequilibrio virium attractionis (versus centrum oneri positivi diffusi per sphaeram) et repulsionis (inter electrona). Motus vero oscillatorii electronum, ab externis actionibus excitati, causare potuissent vibrationes electromagneticas aetheris.

Plurima vero argumenta hodie manifestant aliam esse structuram atomorum : onera electrica positiva (protona) constituunt (una cum neutronibus) nucleum fere punctiformem ; electrona (onera negativa) constituunt partem periphaericam ; et dimensiones nuclei minimae sunt respectu involucri electronici. Notandum nobis est argumentum quo Rutherford, inde ab anno 1911, refutaverat hypothesim Thomson : agitur enim de argumento quod ostendit communes leges electrologiae iure applicari etiam intra fines ultramicroscopicos atomorum (saltem in adiunctis de quibus agitur) ; quod factum nobis dein recolendum erit.

Rutherford perpenderat peculiarem modum, quo flectuntur traiectoriae particularum α, cum fasciculus harum particularum, emanans e substantiis radioactivis, impingit in subtilia folia metallica. Particulae α (quae sunt nuclei atomi helii, electricitate positiva praediti) pro sua ingenti velocitate (10^9 cm/sec) pertranseunt folia ; eorum traiectoriae flectuntur ; sed non ea ratione quam hypothesis Thomson infert.

Sicut enim leges electrologiae probant, si electricitas positiva atomi diffusa esset modo uniformi per totam extensionem atomi, eius actio repulsiva contra particulam α prius cresceret

(dum particula appropinquat atomum), dein decresceret (post penetrationem particulae in sphaeram atomi) ; quare traiectoriae nonnisi leviter flecterentur.

Aliter vero phaenomenon contingit : traiectoriae variarum particularum diffunduntur in omnes sensus, et etiam regrediuntur. Hic autem regressus nequit tribui ictui particulae α contra electrona, quorum massa levissima negligenda est. Optime vero phaenomenon explicatur (etiam sub aspectu quantitativo) si onera positiva ponuntur collecta in nucleo punctiformi : tunc (iuxta leges electrologiae) nuclei exercent tales actiones repulsivas, quae causare debent illas ipsas flexiones traiectoriarum, quae reapse contingunt.

Accedit optima confirmatio : ipsae leges sinunt aestimationem quantitatis electricitatis positivae variorum atomorum ex flexionibus traiectoriarum quas causant : sic detecta est lex illa fundamentalis, iuxta quam numerus onerum elementarium positivorum, qui competit singulis atomis certi elementi, est ipse numerus atomicus eiusdem elementi in tabella periodica elementorum.

b. Hypothesis Rutherford.

Rutherford ex experimento circa deflexiones radiorum α collegit notissimum exemplar atomicum ad instar systematis planetarii : circa nucleum, fere punctiformem, electrona percurrunt traiectorias ellipticas, sicut planetae circa solem.

Talis motus electronum visus etiam est explicare emissionem lucis ab atomis. Etenim, iuxta leges electromagnetismi, motus electrici oscillatorii causant undas electromagneticas.

Sed e tali hypothesi colligerentur etiam peculiaria adiuncta quae nequeunt admitti : electrona enim, dum suo motu oscillatorio irradiant energiam, necessario simul insumunt suam energiam ; quare praestaret vis attractiva nuclei, et electrona, inter brevissimum intervallum temporis (10^{-8} sec.), ruerent in nucleum percurrendo traiectorias ad instar spirarum, quarum dimensiones et frequentiae oscillatoriae variarentur modo continuo.

Duo igitur sequerentur, quae cum experimentis non congruunt :

1. Structura atomica numquam esset aedificium stabile, in quo distinguantur (sicut certa argumenta postulant) non solum nucleus et zona peripherica electronum, sed etiam plures distincti stratus energetici ipsius zonae periphericae (cfr. nn. 49, a ; 52 ; 62 ; 70).

2. Frequentiae radiationum variarentur modo continuo sicut ipsae frequentiae motuum orbitalium, et non producerentur illae frequentiae fixae et characteristicae singulorum elementorum, quas analysis spectroscopica empirice colligit (cfr. n. 48, a, b ; sequens caput III).

Insolutum igitur manebat problema de interna structura atomorum, apta ad explicandas radiationes lucis ab atomis emissas : Bohr novam structuram excogitavit, applicando hypothesim quanticam Planck-Einstein.

47. Nova hypothesis Bohr: de atomo hydrogenii.

a. Prior condicio quantica (optica).

Bohr, anno 1913, novas hypotheses quanticas applicavit ad investigandam internam structuram atomorum. Supposuit hypothesim fundamentalem Planck, et hypothesim Einstein de photonibus. Collegit intra atomum dari tot definitos gradus energeticos $E_1\ E_2 \dots E_k\ E_l \dots E_n$, qui per definitos saltus distinguuntur ab invicem.

Etenim : si energia radians erogatur per « quanta », necessario simul producuntur intra atomum pares imminutiones energiae, quae propterea fiunt et ipsae per « quanta ».

Cum, ex. gr., atomus emittit quoddam photon $\varepsilon = h \cdot \nu$, eius internus status energeticus transit a quodam gradu energetico E_l ad alium gradum E_k, et necessario stat aequalitas :

(I) $$E_{l \to k} = E_l - E_k = \varepsilon = h \cdot \nu$$

Statim colligitur etiam relatio inter frequentiam radiationis emissae et internam imminutionem ΔE energiae atomi ; nam :

$$E_l - E_k = h \cdot \nu\ ; \quad \nu = \frac{E_1 - E_k}{h}$$

Apte absolvitur theoria si definiri possunt varii gradus energetici $E_1 \dots E_n$; statim enim colliguntur varii possibiles saltus energetici interni $E_{l \to k}$, et variae frequentiae radiationum ; hae tandem comparandae sunt cum frequentiis empirice compertis analysi spectroscopica. Tandem congruentia (si datur) inter frequentias theoretice computatas et frequentias empirice comprobatas valde commendat theoriam.

b. Altera condicio quantica (mechanica).

Bohr, ad theoretice definiendos distinctos gradus energeticos atomorum, consideravit primo atomum simplicissimam hydrogenii, quae constat uno protone nucleari et uno electrone. Retinuit exemplar atomicum planetarium (Rutherford), et, simplicitatis causa, admisit solas orbitas circulares.

Postulavit in primis electron non irradiare energiam electromagneticam dum percurrit definitam orbitam.

Hoc autem postulatum congruit cum condicione statuenda de statibus energeticis stationariis E_1, $E_2 \dots$; videtur etiam requiri ne colligantur illa consectaria (de instabilitate aedificii atomici et de variatione frequentiarum radiationum — cfr. n. 46, b), quae non cohaerent cum factis empiricis. Mox considerabimus an hoc ipsum postulatum congruat cum exemplari atomico admisso ; interim illud admittamus velut condicionem necessariam ad construendam novam theoriam.

Ad computandos varios status energeticos stationarios E_1, $E_2 \dots$, Bohr retinuit et applicavit ordinarias leges electrologiae et mechanicae ; ex quibus colliguntur :

— energia potentialis electronis respectu nuclei : $-e^2/r$

e denotat onus electricum elementare sive protonis $(+e)$ sive electronis $(-e)$;

r denotat distantiam electronis a nucleo seu radium orbitae.

signum negativum indicat vires campi, nexae cum energia potentiali, impellere electron versus nucleum, seu versus valores decrescentes radii r.

— energia cinetica electronis (pro eodem radio r) : $\frac{1}{2}\, e^2/r$ *
— energia totalis (potentialis + cinetica) :

$$\text{(E)} \qquad E_{\text{tot.}} = E_{\text{pot.}} + E_{\text{cin.}} = -\tfrac{1}{2}\, e^2/r \qquad **$$

Cum iam definita sit energia totalis $E = -\frac{1}{2} \cdot e^2/r$ pro quovis radio r, ad colligendos distinctos gradus energeticos E_1, E_2..., definiendi manent varii radii r_1, r_2..., qui necessario variari debent per saltus, ut ipsi gradus energetici distinguantur per saltus.

Iamvero, ad definiendos distinctos radios r_1, r_2..., praesto est criterium quanticum. Hypothesis Planck posuerat actionem habere structuram velut atomicam, cuius « quantum » elementare est h ; actiones maiores, constitutae tot « quantis » elementaribus, sunt multiplae (iuxta numerum integrum n) valoris elementaris h. Hac condicione usus est Bohr ad seligendos radios r possibiles, seu (ut dicitur) ad « quantificandas » orbitas.

« Actio », quam electron absolvit percurrendo suam orbitam circularem, aequat productum quantitatis motus $(m \cdot v)$ per spatium percursum $(2\pi r)$; quare condicio quantica scribitur :

$$\text{(II)} \qquad 2\pi r \cdot m v = \text{n} \cdot h$$

Cum vero (cfr. notam *) stet aequalitas :

$$v = e / \sqrt{m \cdot r}$$

* Etenim : ex duabus expressionibus virium centripetarum, altera electrica, $(-e^2/r^2)$ altera mechanica $(-mv^2/r)$, cum sint aequales inter se $(e^2/r^2 = mv^2/r)$, colligimus : $v^2 = e^2/mr$; consequenter energia cinetica $\frac{1}{2}\, m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\, e^2/r$.

** Signum negativum indicat energiam esse altiorem pro radiis r maioribus. Quare electron, ut elevetur ad orbitas superiores (i. e. : ut transferatur versus valores positivos crescentes radii r) recipere debet energiam ab externo. Sponte vero energia electronis producit laborem in sensum oppositum (versus valores decrescentes radii r), ita ut systema sponte evolvatur versus status energeticos inferiores ; huic vero internae imminutioni energiae respondet erogatio energiae ad extra, sub forma radiationum.

colligitur :

$$\text{(r)} \qquad r_n = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} \qquad [\text{n} = 1, 2, \ldots]$$

Scilicet : radii orbitarum variantur per saltus, et servant proportionem fixam cum potentia secunda numeri ordinalis uniuscuiusque orbitae.

Tandem, ex expressionibus (E) energiae et (r) radiorum, colligimus energiam E_n pro orbita n.sima :

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2}$$

et interni saltus energetici atomi (pro saltu electronis ab orbita l.sima ad orbitam k.simam) sunt :

$$E_{l \to k} = E_l - E_k = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{l^2} \right)$$

et relativae frequentiae radiationum :

$$\text{(f)} \qquad \nu = \frac{E_l - E_k}{h} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{l^2} \right)$$

48. Confirmationes experimentales.

a. Congruentiae inter frequentias theoretice definitas et frequentias empirice collectas analysi spectrali.

In figura 17 graphice repraesentantur (pro valoribus e theoria collectis) :

— Radii orbitarum 1.ae, 2.ae, 3.ae . . . . .
— Gradus energetici E_1 E_2 E_3 . . . . .

N.B. - Linea curva definit modo continuo energiam E pro quolibet radio r.

— Saltus energetici $\Delta E_{2\to1}$; $\Delta E_{3\to1}$; $\Delta E_{4\to1}$; $\Delta E_{3\to2}$ ...

Pro statu atomi non excitato, electron occupat primam orbitam (fundamentalem) ; extollitur ad superiores orbitas (seu

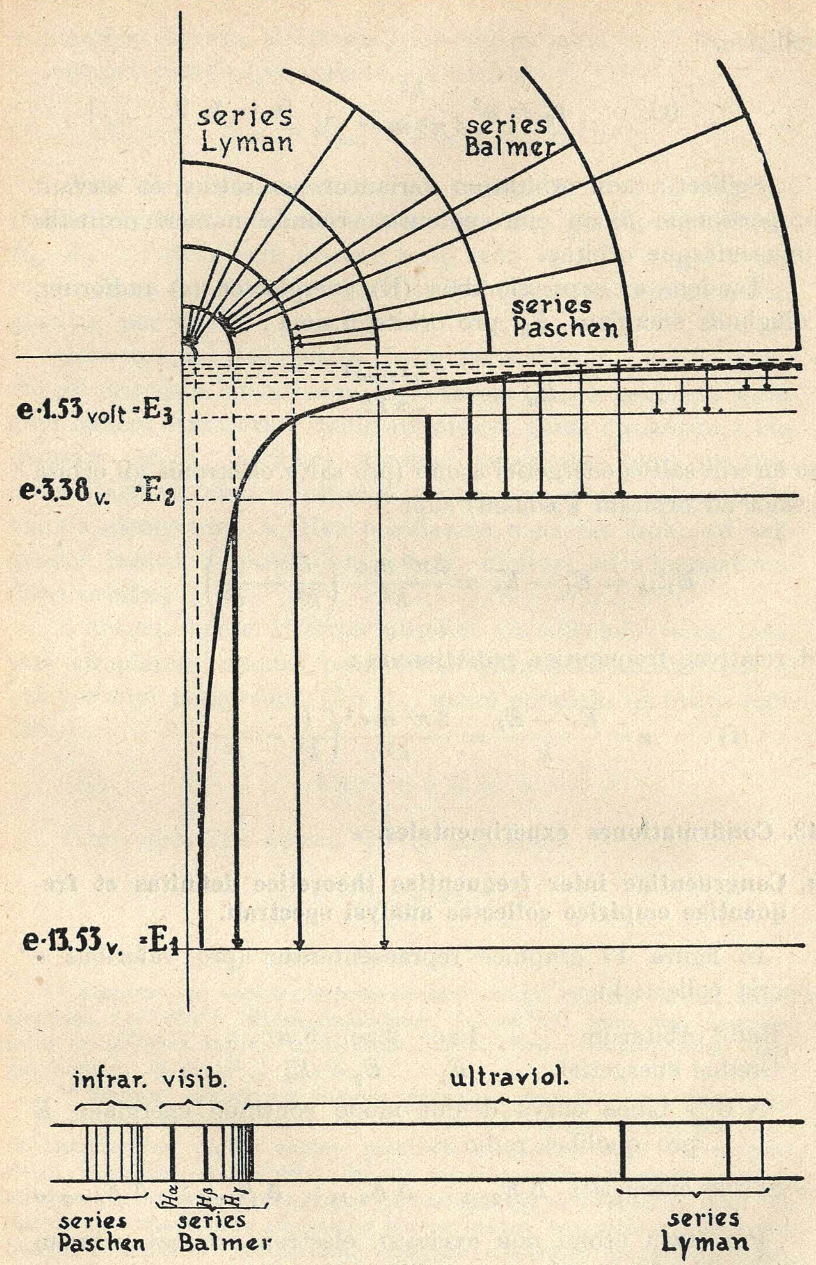


fig. 17

ad altiores gradus energeticos) si ab externo recipit quamdam excitationem energeticam (thermicam, vel ictibus, vel radiationibus, vel actionibus electricis ...). Ipsum electron reddit (ex toto vel ex parte) energiam receptam irradiando energiam sub forma photonum, cum ex orbitis superioribus denuo saltat in inferiores orbitas.

Huiusmodi saltus energetici componunt tres praecipuas series radiationum, prout electrona, e superioribus orbitis, ruunt in primam, in secundam vel in tertiam orbitam. Relativae autem series frequentiarum ($\nu = \Delta E/h$), quas theoria definit, egregie congruunt cum tribus seriebus, quas Balmer, Paschen et Lyman empirice detexerant analysi spectroscopica.

b. Congruentia cum formulis empiricis analysis spectroscopicae

Balmer, inde ab anno 1885, notaverat varias frequentias hydrogenii, quas ipse recensuerat, resumi posse sequenti formula :

$$\text{(s)} \qquad \nu = R\,(1/4 - 1/n^2) \qquad (n = 3,\ 4 \ldots)$$

Patet congruentia cum formula (f) Bohr ; quare formula theoretica Bohr bene interpretatur formulam empiricam Balmer, et nominatim eius factorem constantem R.

Notandum est discrimen, mere practicum, inter formulas (f) et (s): analysis spectroscopica, ad designandas varias radiationes, non utitur ipsa frequentia ν, quae exprimit numerum vibrationum per sec., vel (quod ad idem redit) numerum undarum quae iterantur per 300.000 km. (spatium a luce percursum per sec.) : agitur enim de numeris nimis altis, quae neque summa exactitudine experimentis definiuntur ; propterea adhibetur « numerus undarum » ($\bar{\nu}$) quae iterantur per parvum spatium unius centimetri ; stat igitur aequalitas :

$$\bar{\nu} = \nu/c \qquad \text{vel, cum sit} \quad \nu = c/\lambda, \qquad \bar{\nu} = 1/\lambda$$

Ipsi « numeri undarum » promiscue denominantur etiam « frequentiae ».

Quare transitus fit ab aequalitate (f) ad aequalitatem (s) si dividitur per c utrumque membrum prioris aequalitatis.

Colligimus expressionem factoris R iuxta theoriam Bohr :

$$R = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 \cdot c}$$

Hic numerus, qui pervadit totam analysim spectroscopicam denominatus est « numerus Rydberg », et exprimit quemdam peculiarem « numerum undarum » ; ex ipsa enim formula Balmer colligimus « numerum undarum » $\bar{\nu}$ tendere ad valorem $R/4$ quo magis crescit numerus n alterius termini R/n^2 ; quare $R/4$ est ille « numerus undarum » qui definit limitem superiorem seriei Balmer.

In spectroscopia, expressiones sicut, ex. gr., expressiones $R/2^2$, R/n^2 contentae in formula Balmer, denominantur « termini spectroscopici » ; omnes autem « numeri undarum », quas spectroscopia definit, sunt tot « differentiae » inter duos « terminos spectroscopicos », quorum alter invariatus manet pro certa serie frequentiarum. Exemplum seriei Balmer iam satis illustrat has notiones et relativa facta experimentalia.

49. Significatio et vis ontologica theoriae.

a. De gradibus energeticis.

Congruentia inter frequentias empirice compertas et frequentias theoretice collectas (iuxta formulam $\nu = \Delta E/h$) ex definitis saltibus energeticis tanta et talis erat, quae non poterat haberi fortuita ; quare hoc solo argumento iam satis comprobati erant (inde ab initio theoriae) interni saltus energetici atomorum inter definitos gradus.

Accesserunt alia experimenta (Franck-Hertz, 1913-14), quae sine ulla aequivocatione ostendunt dari in atomis distinctos et definitos gradus energeticos : atomi enim non absorbent nisi per definitos saltus energiam, quae ipsis ab externo suppeditatur ; agitur autem de illis ipsis saltibus, qui perficiuntur in sensum inversum, cum atomi (descendendo ad gradus energeticos inferiores) emittunt radiationes, quarum frequentiae respondent legi quanticae $\nu = \Delta E/h$.

Plures igitur notitiae de interna structura atomorum acquisitae sunt inde ab initiis huius theoriae quanticae; scilicet:

— dantur in atomis definiti gradus energetici, qui per saltus distinguuntur lege quantica (qui « quantificati » dicuntur) ;

— ad definiendos hos gradus concurrunt quidam numeri integri, qui « numeri quantici » denominantur ;

— internis variationibus energeticis atomi (quae per saltus fiunt) respondent erogationes ad extra (vel absorptiones ab externo) « quantorum » energiae ;

— frequentiae radiationum, quas atomi emittunt per « quanta », obtemperant legi quanticae $\nu = \Delta E/h$.

b. De orbitis electronum.

Congruentia inter theoriam et experimenta adeo mira visa est, ut etiam aestimatae sint satis comprobatae ipsae orbitae electronicae, quibus Bohr usus erat ad computandos gradus energeticos.

Reapse tanta conclusio non poterat iure colligi ex confirmationibus experimentalibus theoriae, quae directe vertebantur circa frequentias radiationum. Deerant enim, inter frequentias irradiatas et orbitas, illi necessarii nexus, qui exstabant inter ipsas frequentias et internos gradus energeticos atomorum ; requiruntur vero tales nexus ut ex veritate conclusionis colligere possimus veritatem hypothesis, ex qua conclusio hausta est.

Plura ad hunc propositum notari possunt * ; nulla vero controversia de hac re iam nunc instituenda est : ipsa recentior scientia physica non exhibet atomum Bohr ut fidelem expressionem structurae atomicae, sed tantum ut methodum ad computandos (prima quadam approximatione) gradus energeticos atomi, necnon ut exemplar utile sive ad illustrandos gradus energeticos peculiari interpretatione sensibili, sive ad nobis praebendas faciles imagines et expressiones, quibus de his rebus loquamur.

In sequenti capite III exponemus plura argumenta, quarum vi sepositae sunt interpretationes mechanicae atomorum.

* Cfr., Hoenen : *Cosmologia*, nn. 304 et seqq.

Ex his quae exposita sunt iam colligitur validum argumentum contra orbitas postulatas a Bohr, quia hypotheses admissae involvunt internam contradictionem.

Haec enim, inter cetera, postulata sunt:

— electron non irradiat energiam electromagneticam dum percurrit definitam orbitam;

— valent, intra ipsos fines atomicos, ordinariae leges electrologiae, quarum auxilio computati sunt gradus energetici. Prae oculis habenda sunt etiam experimenta circa deflexiones radiationum α, quae ostendunt ipsas leges electrologiae reapse valere etiam intra fines atomicos (cfr. n. 46, a).

Insuper non desunt intra fines atomorum proprietates magneticae (certis experimentis comprobatae), quae (iuxta exemplar atomicum Bohr) referendae sunt ad definitos motus orbitales electronum.

Iamvero collectio omnium harum proprietatum electricarum et magneticarum infert illam irradiationem energiae electromagneticae, quae (iuxta ipsum electromagnetismum classicum) producitur quoties electrona moventur motu oscillatorio.* Non autem sufficit ut verbis electrona postulentur non irradiare energiam suis motibus periodicis intraatomicis, si intra ipsos fines atomorum statuuntur illae condiciones et proprietates, quae inferunt irradiationem.

c. Vis euristica theoriae Bohr.

Nemo est qui, post successus theoriae Bohr, illi non agnoscat vim euristicam, etiamsi exemplar atomi non fideliter exprimat veram structuram atomorum.

Eadem vis euristica a priori affirmari non poterat. Fundamenta enim theoriae nimis hybrida sunt: non solum (ut nuper exposuimus) leges electromagnetismi negantur et affirmantur; sed etiam leges classicae copulantur cum novo principio quantico, quod postulat hypothesim anticlassicam (cfr. n. 16).

* Producuntur irradiationes electromagneticae, iuxta ipsam theoriam maxwellianam, si admittuntur « tensiones magneticae » fluxus electrici (productae motu electronum), et proprietas reciproca seu « tensiones electricae » (inductae) fluxus magnetici oscillantis.
Cfr. Soccorsi: *De cognitione mundi physici: de energia radianti.*

Ut iam notavimus, Poincaré (apud « Consilium Solvay » Bruxelles - 1910), perpendens similes hybridas copulationes principiorum, dixerat: « Ce qui m'a frappé ... c'est de voir une meme théorie s'appuyer tantôt sur les principes de l'ancienne mécanique, tantôt sur les nouvelles hypothèses qui en sont la négation; on ne doit pas oublier qu'il n'est pas de proposition qu'on ne puisse aisément démentrer, pour peu que l'on fasse entrer dans la démonstration deux prémisses contradictoires ».

His non obstantibus, alia regula logica asserit ex falso, vel etiam ex principiis contradictoriis, colligi posse tum verum tum falsum. Prudens enim inquisitio seligere potest ex utraque parte quaedam elementa vera.

Reapse hybrida structura principiorum, quibus Bohr fundavit suam theoriam, non ut culpa adscribenda est illustri physico, sed potius ut bonum meritum. Tunc temporis enim iam nullum dubium manebat circa necessitatem construendi novam physicam quanticam; hypothesis vero Planck, dum exigebat novas hypotheses anticlassicas, impar erat per se solam ad nova fundamenta iacienda; ex alia parte physica classica, quae tot eximios successus assecuta erat, procul dubio plures aspectus veros referebat; necessarium igitur erat ex utroque fonte caute haurire pleniorem veritatem.

Bohr, suo principio « correspondentiae » de quo postea dicemus, prudens et foecundum criterium selectionis statuit: studia hac methodo peracta, non solum foecunda fuerunt, sed etiam viam aperuerunt recentioribus methodis physicae quantisticae.

ARTICULUS II.

Opus Sommerfeld

50. « Structura subtilis » linearum spectralium et bini numeri quantici.

Accuratior analysis spectroscopica, adhibens media peculiari vi resolutoria praedita, detexit lineas spectrales hydrogenii (quas Bohr theoretice interpretatus erat) reapse non esse lineas simplices, sed constitui pluribus lineis (binis vel ternis ...) valde proximis.

Iuxta igitur ideam fundamentalem Bohr, alii gradus energetici atomi excogitandi erant, ita ut alii saltus energetici produci possent, qui alias frequentias radiationum producerent.

Ad hunc finem Sommerfeld supposuit orbitas electronicas non esse tantum circulares (iuxta pristinam et simpliciorem hypothesim Bohr), sed etiam ellipticas, ita ut maior copia orbitarum definiret copiosiores gradus energeticos.

Etiam hae orbitae ellipticae (non minus quam orbitae circulares Bohr) variandae erant saltuatim, ut determinare possent novos saltus energeticos. Ad has ellipses definiendas Sommerfeld bis applicavit criterium quanticum Bohr, quod postulabat « actionem » electronis per integram orbitam esse multiplam, secundum numerum integrum, actionis elementaris h: distinxit Sommerfeld velocitatem electronis in duas velocitates componentes (fig. 18), quarum altera est «radialis» (qua variatur distantia r electronis a foco ellipsis); altera est « azimutalis » qua variatur angulus azimutalis φ). Pro duabus velocitatibus componentibus, colliguntur duae partiales quantitates motus ($m\,v_r$; $m\,v_\varphi$) et duae actiones partiales :

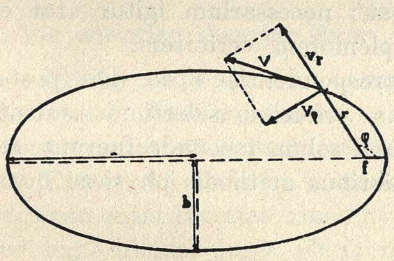


fig. 18

$$m\,v_r \cdot d\,r \qquad\qquad m\,v_\varphi \cdot r\,d\varphi$$

quarum valores continuo variantur pro singulis variationibus infinitesimis dr et $d\varphi$, quia velocitas totalis v electronis per orbitam ellipticam, non est constans ; et etiam variantur duae velocitates componentes v_r et v_φ. Condicio quantica postulat ut duae summae integrales duarum actionum partialium (per integram orbitam) sint multiplae « quanti » actionis h, secundum duos numeros (quanticos) integros, quos denotabimus litteris k' et k.

Scilicet, si symbolo $\oint$ significamus summam integralem extensam ad integrum motum periodicum, duae condiciones quanticae scribuntur :

$$\oint m \cdot v_r \cdot dr = k' \cdot h \qquad \oint m \cdot v_\varphi \cdot r \cdot d\varphi = k \cdot h$$

Facile computatur summa integralis actionis azimutalis, quia, quamvis inter revolutionem electronis, continuo varietur tum v tum r, tamen constanter invariatus manet productus $p = m \cdot v_\varphi \cdot r$ (qui dicitur « momentum cineticum » vel « momentum angulare »). Quare, si in evidentiam ponimus factorem constantem p, condicio quantica pro actione azimutali scribitur :

$$\oint m \cdot v_\varphi \cdot r \cdot d\varphi = p \cdot \oint d\varphi = k \cdot h \qquad [p = m \cdot v_\varphi \cdot r = \text{const.}]$$

summa autem omnium angulorum infinitesimorum $d\varphi$ per integrum gyrum est 2π ; quare tandem colligimus :

$$p \cdot 2\pi = k \cdot h$$

$$p = h/2\pi$$

Hae expressiones (quae denuo applicabuntur ad alias condiciones quanticas definiendas) nobis manifestant duas propositiones aequipollentes : « actionem periodicam azimutalem » esse multiplam « quanti » actionis h infert « momentum cineticum » esse multiplum quantitatis $h/2\pi$, quae propterea habetur velut « momentum cineticum elementare » seu « unitas quantica momenti cinetici ».

Simili ratione computatur summa integralis actionis radialis per integram orbitam ; colligitur numerus quanticus k',

qui sequentem relationem habet cum numero quantico azimutali k et cum semiaxibus a et b ellipsis (a = semiaxis maior):

$$b/a = k/(k+k') = k/n$$

Bini numeri quantici k et k', definendo actiones periodicas electronis, definiunt motum ellipticum sub aspectu mechanico, et implicite etiam formam et dimensiones ellipsis: nominatim semiaxis maior a probatur pendere ex sola summa $n = k + k'$; scilicet, eadem est longitudo a quoties eadem est summa n, etiamsi varientur duo addendi k et k'.

Terni numeri quantici n, k, k' denominantur: « quantum totale »; « quantum azimutale »; « quantum radiale ».

Pro uno eodemque « quanto totali » n, definiuntur n distinctae ellipses pro diversa combinatione quantorum k et k'. Ex. gr.: pro $n = 3$, haberi possunt sequentes bini numeri k, k', quorum summa est 3 (fig. 19):

n = 3: Orbitae

k	k'	
3	0	*
2	1	**
1	2	***
0	3	(†)

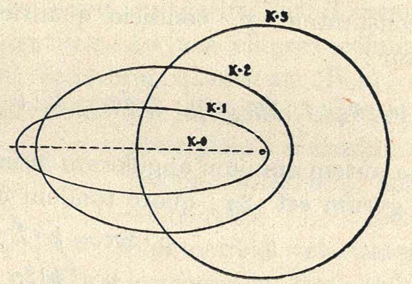


fig. 19

(*) Orbita circularis deest actio radialis:

$$b/a = k/n = 3/3 = 1\,; \quad b = a$$

(**) Orbita elliptica minori eccentricitate praedita:

$$b/a = k/n = 2/3$$

(***) Orbita elliptica maiori eccentricitate praedita:

$$b/a = k/n = 1/3$$

(†) Segmentum rectilineum: deest actio azimutalis;

$$b = a \cdot k/n = a \cdot 0/3 = 0$$

Orbita (*) est ipsa orbita circularis quam Bohr definiverat pro unico quanto $n = 3$.

Orbitae (**), (***) sunt orbitae ellipticae addendae uni orbitae Bohr, pro eodem quanto totali $n = 3$.

Segmentum rectilineum (quod respondet combinationi $k = 0$, $k' = 3$) non est recensendum inter orbitas electronis circa nucleum: electron enim impingeret in nucleum.

Quare introductio orbitarum ellipticarum dat, pro quavis n.sima orbita circulari Bohr, n distinctas orbitas, quarum prima est ipsa orbita n.sima Bohr.

Completa series orbitarum (pro certo quanto totali n) definitur variis combinationibus numerorum n et k:

— quantum totale: n
— quantum azimutale: n, n-1, n-2, ... 2, 1

Aedificium theoreticum nondum absolutum est; etsi enim multiplicatae sunt orbitae, nondum definiti sunt novi gradus energetici, qui (iuxta mechanicam classicam) pendent ex solo quanto totali n, seu ex solo axe maiori orbitae. Sed, iuxta theoriam relativitatis, quam Sommerfeld applicavit, pro varia velocitate electronis percurrentis orbitam ellipticam, variatur eius massa inertialis m (cfr. n. 22, a); ratione autem habita de hac variatione massae, obtinentur tot diversi gradus energetici (pro definito n) quot distincta quanta azimutalia k enumerantur: obtinentur scilicet n gradus energetici.

Consequenter multiplicantur varii saltus energetici et praevidentur plurae frequentiae.

Ex. gr.: ab orbitis 3.tii ordinis (quantum totale = 3) ad orbitas 2.di ordinis (quantum totale = 2) pro uno saltu energetico praeviso a Bohr, exstant 6 distincti saltus (fig. 20):

Gradus energetici theoretice computati et relativae frequentiae radiationum optime congruunt, sub aspectu quantitativo, cum structura subtili quae explicanda erat; tamen non producuntur omnes saltus theorice praevisi: quidam saltus experimentis confirmati sunt; alii vero confirmati non sunt. Theoria propterea indigebat quadam emendatione et aptatione.

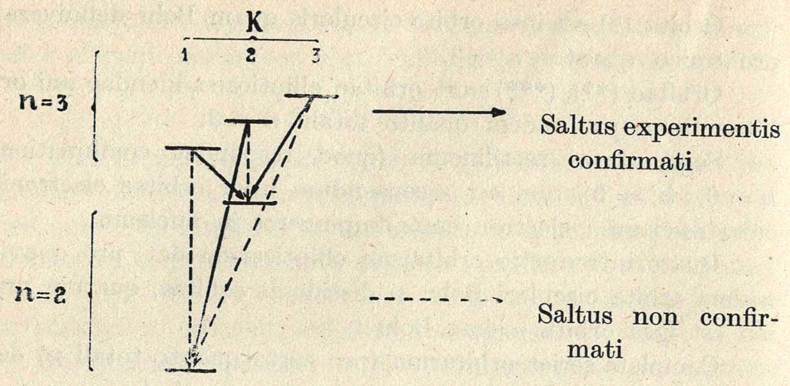


fig. 20

51. « Regulae selectivae ».

Ex methodo Sommerfeld ad « quantificandas » orbitas ellipticas, ut nuper conclusimus, colliguntur copiosiores saltus energetici, quam qui reapse contingunt ; quare theoria completa est peculiari regula selectiva, qua distinguuntur « saltus admissi » et « santus interdicti ».

Praecedens schema illustrat exemplo particulari regulam quae generalis est ; scilicet :

— « saltus admissi » ii sunt pro quibus quantum azimutale k variatur una unitate : $\Delta k = \pm 1$.

— « saltus interdicti» ii sunt pro quibus $|\Delta k| \begin{cases} = 0 \\ > 1 \end{cases}$

N.B. - Etiam aliae similes regulae selectivae — ut dein exponetur — addendae sunt ut theoria conformetur ad facta empirica.

52. Significatio et vis ontologica theoriae Sommerfeld.

Congruentia theoriae cum « structura subtili » spectri hydrogenii confirmat frequentias radiationum referendas esse (iuxta ipsam regulam Planck : $\nu = \varepsilon/h$) ad definitos et distinctos gradus energeticos atomi.

Congruentia ipsa adeo minuta est ut initio visa sit etiam comprobasse non solum internos gradus energeticos atomi, sed etiam eorum interpretationem mechanicam, quae supponit orbitas electronicas ellipticas et variationem massae inertialis electronis iuxta theoriam relativitatis.

Sed iudicium de hac re nequit dari seiunctim ab aliis argumentis (cfr. n. 49, b), de quibus plura dein dicemus.

Interim notemus ipsam theoriam Sommerfeld praebere nonnulla argumenta, quae non favent illi peculiari interpretationi mechanicae atomorum, quae refert earum internos gradus energeticos ad orbitas electronum.

Etenim :

1. Regulae selectivae, quae necessario addendae sunt ut theoria conformetur ad facta empirica, non hauriuntur ex ipsis principiis theoriae, sed potius (cfr. n. 49) e principiis ipsi theoriae extraneis ; quare tales regulae potius se exhibent velut emendationes et compensationes, quae adiciendae sunt cuidam hypothesi quae non bene congruit cum re.

2. Applicatio methodi Sommerfeld (in adiunctis quae dein exponemus : cfr. n. 56, b) ad hoc ducit : si ad describendas orbitas electronicas adhibentur diversa systemata coordinatarum, colliguntur quidem iidem gradus energetici, sed orbitae diversae.

Quod factum iam ex se indicat non parem significationem et vim tribuendam esse gradibus energeticis et eorum interpretationibus mechanicis per orbitas. Ipsum factum saltem ostendit exactam computationem graduum energeticorum non constituere rationem sufficientem ut dicantur comprobatae etiam orbitae : secus comprobarentur orbitae diversae.

3. Iuxta interpretationem mechanicam Bohr-Sommerfeld graduum energeticorum atomi, « numerus quanticus azimutalis » k exprimit « momentum angulare » electronis percurrentis orbitam circa nucleum ; quare exclusus est numerus $k = 0$, quia contradictorium esset motus orbitalis circa nucleum sine ulla variatione anguli azimutalis.

Sed, progressu studiorum, ut gradus energetici melius conformarentur ad terminos spectroscopicos empirice compertos, pro « quanto azimutale » k positus est novus numerus quanti-

cus $l = k - 1$, ita ut varii valores tribuendi huic numero essent : n-1, n-2 . . . 2, 1, 0 ; includendus propterea erat ille ipse valor $k = 0$, qui iam exclusus erat utpote repugnans interpretationi mechanicae quanti azimutalis.

Novus numerus l servat quidem nomen « quanti azimutalis », sed iam non retinet pristinam significationem physicam « momenti angularis », cum qua valor 0 componi nequit. Apparet igitur quaedam incongruentia inter facta experimentalia et exemplar atomi ad instar systematis planetarii, quod conformetur ad leges classicas.

Caput II

PROGRESSUS STUDIORUM THEORETICORUM

Articulus I

De distinctione et coordinatione mechanicae classicae et mechanicae quanticae.

53. Problema de rite inserenda condicione quantica in aequationibus classicis.

a. Ratio et difficultas problematis.

Felix successus theoriae Bohr-Sommerfeld nullum dubium reliquerat de necessitate inserendi condiciones quanticas in descriptione phaenomenorum atomicorum. Desiderabantur tamen methodi perfectiores ; etenim : compromissa nimis hybrida admissa erant, et nimiae artificiosae emendationes et aptationes requirebantur, quae neque plene congruebant cum positionibus fundamentalibus theoriae.

Praeterea permanebat radicalis oppositio principiorum, a Poincaré accurate demonstrata, vi cuius condicio quantica introducenda secum ferebat notam contrariam physicae classicae.

Talia adiuncta neque decebant scientiam physicam, cuius principia simplicitate praestare debent et omnimoda congruentia logica, neque indicabant tutam methodum investigationis. Numquid eiuranda erat tota scientia classica, iam tam ample et tam mire elaborata ? Si vero retineri poterat, quo pacto, sine logica contradictione, aequationes classicae copulandae erant cum condicione quantica, postulante hypothesim anticlassicam ?

Manifesto inquirenda erat quaedam generalior expressio principiorum mechanicorum, cum qua componi possent, per vices, sive condicio quantica, sive generaliores notae characteristicae physicae classicae, quae stant in principiis hamiltonia-

nis (cfr. n. 44, b). Sed huic operi obstabat ipsa perfectio ad quam iam adducta erat physica classica, complectens tam varios tractatus, qui etiam constituebant aedificium bene compactum et fere in se clausum.

Non obstantibus his difficultatibus, problema praeclara peritia solutum est.

b. Generalis indoles solutionis et eius emolumenta.

Statuta est quaedam generalior mechanica, complectens duas sectiones, quarum altera est ipsa mechanica classica, altera admittit saltus quanticos obtemperantes principiis anticlassicis. Collectio duarum sectionum procul dubio manebat hybrida ; neque tali artificio reapse comparata sunt schemata formalia, quae tandem valerent ad exacte describenda phaenomena (cfr. n. 68, b) ; tamen quoddam systema rationale constructum erat, quod non parvi emolumenti fuit :

— in primis neutrum schema, sive classicum sive quanticum, simul copulabat praemissas contradictorias ;

— in lucem lata est peculiaris congruentia inter duas physicas, seu communis proprietas physicae classicae et quanticae ; quae est : « invariantia adiabatica » modulorum actionum in motibus periodicis (cfr. infra n. 55) ;

— perfectiores methodi definitae sunt ad « quantificanda » systemata mechanica periodica, qualia concipiebantur systemata atomica (cfr. infra n. 56) ;

— ipsa studia et eorum applicationes constituerunt etiam (una cum studiis experimentalibus, de quibus agemus in sequenti capite) stadium intermedium et necessarium, ut tandem constituerentur recentiores physicae quantisticae, quae iam nullo hybridismo inficiuntur, et valent ad exacte describenda phaenomena. Peculiare meritum adscribendum est « principio correspondentiae», quod Bohr definivit (cfr. infra nn. 57, 58, 59).

54. Methodus adhibita ad solvendum problema.

a. Indoles aequationum differentialium.

Prout iam notavimus (n. 53), perpendendae erant generaliores expressiones fundamentalium principiorum dynamicae.

Exprimunt talia principia illae aequationes, « differentiales » denominatae, quae (iuxta methodos calculi differentialis) definiunt relationes inter variationes infinitesimas diversorum parametrorum, quibus describuntur status physici systematum et eorum evolutiones.

Ex. gr., si describendus est aspectus mere cinematicus motuum, parametra (« cinematica ») definientia legem motus sunt coordinatae spatiales (ex. gr. coordinatae cartesianae x, y, z) et tempus (t) ; eorum incrementa infinitesima exprimuntur symbolis dx, dy, dz, dt ; proportiones inter haec incrementa (dx/dt ; dy/dt ; dz/dt) exprimunt velocitates momentaneas v_x, v_y, v_z ; incrementa ipsarum velocitatum respectu temporis (dv_x/dt ; dv_y/dt ; dv_z/dt) exprimunt accelerationes.

Si agitur de problematibus dynamicis, plura alia elementa physica consideranda veniunt : massa (m) corporum ; quantitates motus (quarum incrementa infinitesima sunt $m \cdot dx/dt$, $m \cdot dy/dt$, $m \cdot dz/dt$) ; vires (quarum distinguendae sunt variae componentes f_x, f_y, f_z iuxta varias directiones) ; impulsus ($f \cdot t = m \cdot v$) ; labores quos explent vires ($dL_x = f_x \cdot dx$; $dL_y = f_y \cdot dy$; $dL_z = f_z \cdot dz$).

Inter haec varia parametra et elementa stat, pro variis condicionibus problematum, variae relationes analyticae, quae exprimuntur « aequationibus differentialibus ». Problema solvitur cum definiuntur illae functiones analyticae inter varia elementa, quae describunt phaenomenon non iam per campum variationum infinitesimarum, sed per integrum campum per quem ipsa phaenomena extenduntur.

Functiones quae solvunt problema dicuntur « functiones integrales », vel simpliciter « integrales » aequationum differentialium ; operatio qua ex aequationibus differentialibus colliguntur earum « functiones integrales » dicitur « integratio » aequationum differentialium.

Solutio potest esse completa vel partialis, ita ut dentur « functiones integrales completae », vel « integrales partiales » quibus definiuntur tantum quidam tractus phaenomeni.

b. Generaliores leges dynamicae et « actiones » systematum.

Aequationes quae exprimunt generaliores leges dynamicas exhibentur tribus formis aequipollentibus, quae sunt : aequationes differentiales Lagrange ; principium Hamilton ; aequationes differentiales Hamilton. Tertia forma maximi momenti est, quia faciliores reddit operationes integrationis.

Notanda est pars praecipua, quam haec ultima redactio aequationum tribuit « actioni » systematum ; quod maxime interest quia condicio quantica inserenda respicit ipsam « actionem », postulando eius structuram velut atomicam, multiplam quanti elementaris h.

Aequationes differentiales Hamilton adhibent peculiares series binorum parametrorum, quorum unumquodque — multiplicatum per suum coniugatum parametrum alterius seriei — definit quamdam actionem (partialem) systematis. Ex. gr., si alterum parametrum est quantitas motus, alterum exprimit spatium ; si alterum parametrum est energia, alterum exprimit tempus ; si alterum parametrum est ipsa actio, alterum est factor mere numericus (sicut mensurae angulorum). Insuper, structura aequationum est talis ut, si cognoscatur « actio » totalis systematis, iam methodus datur ad integrandas aequationes.

c. Aequationes de motibus periodicis et « moduli periodici actionis ».

Speciatim perpendendae erant aequationes dynamicae de motibus periodicis : his enim motibus describebantur compagines atomicae.

Elementa autem characteristica motuum periodicorum sunt : periodus (τ) intra quam absolvitur motus cyclicus ; frequentia ipsius motus cyclici ($\nu = 1/\tau$) ; status energeticus systematis oscillantis ; « actiones » (J) quae periodice absolvuntur per unamquamque evolutionem cyclicam ; tales « actiones » dicuntur etiam « moduli periodici actionum ».

d. Insertio condicionis quanticae.

Iamvero generaliores condiciones, quibus (vi principiorum dynamicorum) obtemperare debent « moduli periodici actionum » non definiunt modo univoco ipsos modulos, sed sinunt additionem quarumdam aliarum condicionum ; adiuncta autem sunt talia ut poni possint condiciones quanticae ; scilicet : postulari potest ut, in evolutione systematum, singuli « moduli periodici actionis » varientur per saltus ; ita autem ut singuli saltus sint multipli integri cuiusdam actionis elementaris fixae. Quare aequationes classicae visae sunt quasi sponte paratae ad recipiendam condicionem quanticam.

Solutio tamen non tam obvia erat ; ne simul postularentur condiciones contradictoriae, alia condicio necessario requirebatur : peculiaris scilicet proprietas physica, quae competere debebat sive physicae classicae, sive physicae quanticae : felici autem congruentia haec communis proprietas reapse datur (v. paragraphum sequentem).

55. Peculiaris condicio necessaria ad solvendum problema.

a. « Invariantia adiabatica » modulorum periodicorum actionis, proprietas communis physicae classicae et physicae quanticae.

Condicio quantica, addita aequationibus de motibus periodicis, postulat ut moduli periodici actionum varientur per saltus $n \cdot h$; sed haec condicio implicite postulat etiam ut ipsi moduli actionum nullatenus varientur si systema evolvitur valde lente ; quae lenta evolutio produci potest etiam in compagine atomica, si, ex. gr., atomi lente merguntur in campo magnetico valde debili.

Evolutio systematis dicitur lente evolvi cum, post expletos etiam plures motus cyclicos, fere exacte instaurantur eaedem pristinae condiciones systematis. In his adiunctis, moduli J variari nequeunt neque per saltus (quia condiciones non adeo diversae sunt) neque incremento infinitesimo (quia condicio quantica illud excludit) ; reliquum est ut nullatenus varientur.

Insuper, haec « invariantia », cohaerere debet cum generalioribus condicionibus dynamicis, quas aequationes conscriptae iam definiunt ; agitur autem de ipsis aequationibus dynamicae

classicae ; quare hoc etiam postulatur, ut dicta « invariantia » colligenda sit ex ipsis principiis classicis.

Felici autem congruentia omnes hae condiciones reapse servantur.

Peculiaris illa « invariantia » denominata est « invariantia adiabatica » ob analogam proprietatem transformationum adiabaticarum thermodynamicae.

Iamvero, ex ipsis principiis classicis, colligi potest dicta peculiaris proprietas, quae antea physicos latuerat. Physica autem quantica applicat eamdem proprietatem internis evolutionibus lentis atomorum, et experimenta confirmant hanc proprietatem.

b. « Invariantia adiabatica » modulorum actionis illustratur exemplo macroscopico.

Punctum materiale, suspensum filo subtilissimo, absolvat motum pendularem, percurrendo orbitam ellipticam. Filus lente circumvolvatur (in puncto suspensionis systematis) circa axem, ita ut punctum materiale oscillans paulatim elevetur. Systema pendulare lente evolvitur per condiciones continuo varias : punctum materiale oscillans paulatim elevatur ; energia ad hunc finem impenditur ; status energeticus systematis augetur ; punctum oscillat velocitate crescenti ; eius energia cinetica augetur ; sed simul eius orbita coarctatur ; periodus oscillationis imminuitur ; productus autem energiae per tempus revolutionis (seu modulus periodicus actionis) invariatus manet.

c. Duo distincta schemata describentia phaenomena classica et quantica.

« Invariantia adiabatica » modulorum periodicorum actionis est igitur generalis proprietas physica, quae sinit solutionem problematis, et quae etiam constituit peculiarem congruentiam physicae classicae et quanticae

Hac ratione duo distincta schemata definita sunt ad describendos motus periodicos : alterum respicit systemata, quorum evolutio satis lente fit : et pro ipsis tantum stat physica classica, etiam intra compagines atomicas. Alterum schema

respicit cetera systemata : pro ipsis autem inseritur emendatio quantica.

Constare non poterat a priori an tale schema reapse aptum esset ad fideliter describenda, etiam sub aspectu quantitativo, systemata atomica et eorum internas evolutiones per saltus ; saltem tamen comparatum erat instrumentum mathematicum, cuius auxilio studia circa systemata atomica perfici poterant methodo rationali et contradictionibus experti. Progressus vero studiorum manifestavit tandem quamdam incongruentiam inter schema theoreticum et experimenta (cfr. nn. 68, b ; 71, a).

56. Perfectiores regulae ad quantificanda systemata multiperiodica.

a. Motus multiperiodici: non degeneres et degeneres.

Motus multiperiodici ii sunt, quos componunt plures motus periodici independentes, applicati uni eodemque mobili. Agitur de systemate, quod gaudet pluribus gradibus libertatis, quorum singula parametra independentia variantur modo cyclico ; quare etiam tot motus periodici elementares exstant, et tot periodi, quot sunt gradus libertatis systematis.

Simplicissimum exemplum motus multiperiodici exhibetur a motu unius corpusculi, quod simul ineat tres oscillationes harmonicas, iuxta tres distinctas directiones spatiales x, y, z (cfr. n. 24, c).

Tales motus dicuntur « non degeneres » si variae periodi, quae competunt distinctis motibus componentibus, non sunt commensurabiles inter se ; seu non sunt summultiplae unius eiusdemque periodi.

Hac condicione posita, traiectoria puncti mobilis numquam clauditur in seipsam : numquam enim contingit ut omnes periodi τ_i simul expleantur, ita ut instaurentur eaedem condiciones systematis.

Systema multiperiodicum non degenere exhibet tot distinctas periodos τ_i (incommensurabiles inter se) quot sunt gradus libertatis ipsius systematis ; his periodis respondent totidem « moduli periodici actionis » J_i, qui cyclice absol-

vuntur. Hi moduli actionis componunt actionem totalem systematis, et etiam definiunt eius statum energeticum.

Motus multiperiodici dicuntur « degeneres » si omnes, vel saltem nonnullae, periodi τ_i sunt commensurabiles inter se. Numerantur autem plures vel pauciores gradus « degenerescentiae » pro maiori vel minori numero periodorum commensurabilium. « Degenerescentia » est completa si omnes periodi sunt inter se commensurabiles : quod si contingit, traiectoria clauditur in seipsam ; cum enim omnes periodi simul aliquando expleantur, periodice instaurantur eaedem condiciones totius systematis.

Ex. gr., si agitur de superpositione trium oscillationum harmonicarum, quarum tres periodi sint commensurabiles, punctum oscillans describit notas curvas Lissajoux ; si tres periodi sunt etiam aequales, traiectoria est definita ellipsis.

Si degenerescentia est completa, non manet nisi una periodus vere independens ; pariter non definitur nisi unus modulus periodicus actionis J. Si vero manent plures periodi incommensurabiles, definiuntur etiam totidem moduli periodici J_i.

b. Methodus Sommerfeld ad quantificanda systemata, et eius indoles aliquatenus arbitraria.

Methodus Sommerfeld ad quantificanda systemata, si applicatur systemati degeneri, ducit ad definiendas traiectorias, quae (pro uno eodemque systemate) diversae esse possunt pro diversis coordinatis (ex. gr. cartesianis, vel polaribus) adhibitis ad describendum systema.

Non tamen hac de causa methodus inutilis fit ; quia, non obstantibus dictis variationibus, colliguntur iidem gradus energetici, et eaedem frequentiae ; tamen neque ex toto commendatur methodus quae adhibet elementa arbitraria, significatione physica destituta.

c. Nova methodus a Bohr proposita.

Ad removendos dictos defectus methodi, Bohr directe applicavit condiciones quanticas illis modulis periodicis actionis

J_i (de quibus supra diximus : cfr. a), quibus competunt definitae significationes physicae, et definiti valores, qui non mutantur si mutatur systema coordinatarum. Unaquaequae autem condicio quantica $(J_i = k_i \cdot h)$ definit peculiarem seriem k_i numerorum quanticorum ; quare tot series talium numerorum colliguntur, quot distincti moduli J_i definiuntur.

Si systema non est degenere, tot series numerorum quanticorum colliguntur, quot sunt gradus libertatis systematis ; et quantificatio ipsius systematis est undequaque absoluta. In his vero adiunctis, nova methodus Bohr non differt a methodo Sommerfeld.

Si systema est degenere, colliguntur pauciores series numerorum quanticorum ; quare quantificatio systematis non plene absolvitur ; sed neque involvuntur elementa arbitraria. Ceterum, cum systema est degenere, neque producuntur omnes possibiles distincti gradus energetici ; et superfluum est distinguere plures traiectorias, quibus non respondent distincti gradus energetici.

Quod si nihilominus, perficienda est distinctio et quantificatio omnium traiectoriarum, ex perpensis actionibus physicis aptis ad auferendam degenerescentiam systematis, colliguntur etiam criteria ad eligendas peculiares coordinatas, quae apte definiunt traiectorias; hac ratione perficitur methodus Sommerfeld.

d. Completa quantificatio motus orbitalis electronis circa nucleum atomi.

Ex dictis colligimus completam quantificationem motus orbitalis electronum non absolvi binis numeris quanticis, sed ternis numeris : tres enim sunt eius gradus libertatis per spatium tridimensionale. Et reapse methodus Sommerfeld (quam, simplicitatis causa, nonnisi partim retulimus - cfr. n. 50) si ex integro applicatur ad quantificandum tale systema, definit tres series numerorum quanticorum (cfr. n. 66, a, b).

Neque electron in compagine atomica constituit systema generatim degenere ; quare nulla ex tribus seriebus numerorum quanticorum negligenda est.

Motus electronis circa nucleum plene degener fieret, si eius traiectoria clauderetur in seipsam (fig. 21 a).

Quod vero excluditur duplici de causa ·

1. In primis orbita elliptica electronis init praecessionem circa suum axem, ita ut electron describat lineam curvam apertam, ad instar rosae (fig. 21 b). Hoc phaenomenon nexum habet cum variatione relativistica massae inertialis electronis (cfr. n. 22, a); propter hanc variationem perihelium orbitae init suam propriam revolutionem circa nucleum. Exstat propterea nova periodus independens, cui (iuxta regulas quantificationis) respondet peculiaris numerus quanticus; qui numerus est ipsum « quantum azimutale », quod nexum habet cum eccentricitate orbitae, et cum variatione massae electronis.

2. Axis orbitae non manet immobilis, sed absolvit alium peculiarem motum cyclicum (ad instar axis turbinis), periodice describendo definitam superficiem conicam, cuius axis congruit cum directione H cuiusdam campi magnetici, qui (vel debilissimus) numquam practice deficit intra fines atomicos (fig. 21 c). Haec praecessio axis orbitae circa directionem campi magnetici denominatur « praecessio Larmor »; superficies conica, quam axis sua rotatione describit, magis vel minus patet pro vario angulo α, quem ipse axis efformat cum directione $\vec{H}$.

a

b

c

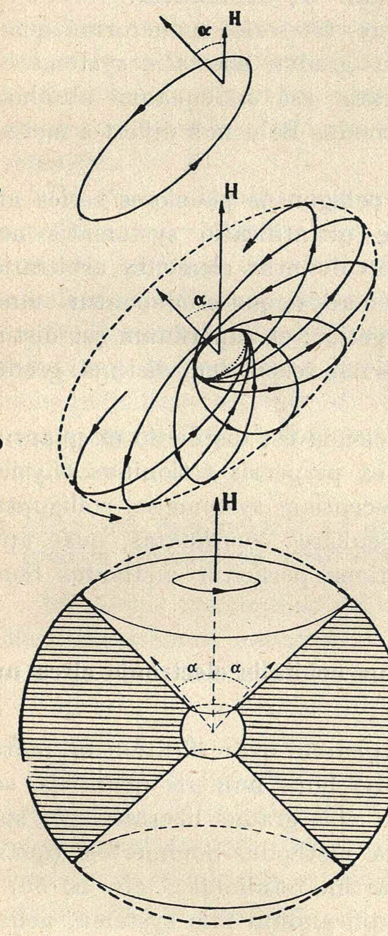


fig. 21

Dum axis orbitae absolvit suam revolutionem circa $\vec{H}$, etiam planum orbitae (rigide nexum cum suo axe) volvitur circa $\vec{H}$, ita ut electron percurrat traiectoriam, quae iam evolvitur per spatium tridimensionale, et quae paulatim replet definitam portionem cuiusdam voluminis sphaerici, prout indicat fig. 21 c.

Hac ratione exstat tertia periodus independens, quae respondet tertio gradui libertatis systematis; huic periodo vero respondet tertius numerus quanticus.

Methodus Sommerfeld definit hunc numerum: agitur de « quanto aequatoriale », quod etiam dicitur « quantum magneticum ». Eius munus est definire varios angulos α, quos axis orbitae efformare potest cum directione privilegiata $\vec{H}$: posita enim condicione quantica (iuxta methodum Sommerfeld) tales anguli nequeunt variari modo continuo, sed per saltus.

Tria igitur elementa systematis variantur per saltus, et absolvunt eius « quantificationem »: axis maior orbitae; eccentricitas orbitae; inclinatio plani orbitae respectu directionis privilegiatae cuiusdam campi magnetici. Tres numeri quantici qui moderantur, suis variationibus, has quantificationes sunt quantum totale, quantum azimutale et quantum magneticum.

Quantificatio, quam moderatur « quantum magneticum », dicitur « quantificatio spatialis ». De ipsa denuo agemus, cum explicandae erunt novae frequentiae, nexae cum variis inclinationibus orbitarum (cfr. n. 66, a, b, c).

ARTICULUS II
Principium Correspondentiae (Bohr).

57. Notae characteristicae radiationum iuxta theoriam quanticam et theoriam classicam.

a. Notae quas definit theoria quantica.

1. Theoria quantica refert frequentias radiationum uniuscuiusque elementi ad varios saltus energeticos ΔE, qui produci possunt intra atomos eiusdem elementi ; colligit autem frequentias iuxta formulam $\nu = \Delta E / h$.

Ad hunc finem theoria quantificat distinctas actiones partiales systematum, postulando ut singulae varientur sicut multiplae actionis elementaris h, iuxta coëfficientes integros k, quibus omnes valores (integri) competere possunt (etiam usque ad infinitum).

Definiuntur hac ratione tot series numerorum quanticorum quot sunt gradus libertatis systematum, seu quot sunt motus elementares periodici, qui componunt motum totalem : ex. gr. colliguntur tres series numerorum quanticorum pro electrone rotante circa nucleum atomi.

Pro unaquaque definita collectione numerorum quanticorum (ex. gr. pro quibusque ternis numeris quanticis systematis atomici) datur definitus status physicus systematis, cui competit (pro adiunctis physicis) definitus gradus energeticus.

Saltus energetici propterea necessario nectuntur cum variatione (per unitates integras) omnium vel quorumdam numerorum quanticorum determinantium statum physicum systematis.

2. Theoria quantica vero nequit, suis ipsis principiis, definire varias intensitates, quas exhibent variae lineae spectrales elementorum. Generali ratione theoria quantica refert maiores vel minores intensitates radiationum ad relativos saltus energeticos magis vel minus frequentes (seu magis vel minus probabiles) ; sed nequit has varias probabilitates eruere ex suis ipsis principiis.

Ad ipsam intensitatem linearum spectralium referenda est etiam totalis absentia cuiusdam frequentiae: haec totalis absentia significat intensitatem nullam, seu probabilitatem nullam relativi saltus energetici.

Cum theoria non explicet haec omnia suis ipsis principiis, adiecerat (modo mere empirico) regulas selectivas distinguentes saltus admissos et saltus prohibitos. Deerant vero regulae circa varias intensitates linearum spectralium.

b. Notae quas definit theoria classica.

1. Theoria classica refert frequentias radiationum ad ipsas frequentias motus oscillatorii electronum intra atomos, qui censebantur causare immediate oscillationes electromagneticas aetheris.

Propterea analysis theorica variarum frequentiarum radiationum revocatur ad analysim variarum frequentiarum (fundamentalium et harmonicarum) quae competunt ipsis motibus oscillatoriis electronum, pro forma peculiari ipsius oscillationis, quam adiuncta physica definiunt.

Analysis Fourier apta erat ad distinguendas varias frequentias componentes (cfr. n. 26, a, et fig. 11).

Etiam in definitione classica frequentiarum partem habent peculiares numeri integri : frequentiae enim harmonicae non sunt nisi multiplae, iuxta numeros integros, frequentiae fundamentalis. Etiam hi coëfficientes integri variari possunt per totam seriem numerorum usque in infinitum. Comparatio propterea institui potest inter numeros integros theoriae quanticae definientes varios saltus quanticos, et numeros integros theoriae classicae, definientes varias frequentias harmonicas.

2. Theoria classica valet etiam ad definiendas illas varias intensitates radiationum, quas theoria quantica non explicat.

Etenim analysis Fourier valet, non solum ad definiendas varias frequentias componentes, sed etiam varias amplitudines undarum ; iamvero potentia secunda amplitudinis undae definit intensitatem radiationis.

Quod si, iuxta ipsam analysim Fourier, quaedam peculiaris frequentia nullam partem habet in componendo motu oscillatorio electronis, explicatur totalis defectus eiusdem frequentiae in radiationibus ; nec theoria indiget ad hunc finem ullis regulis selectivis auxiliaribus.

Ipsa principia valent ad explicandos varios status polarizationis radiationum : sufficit enim ut, pro quadam frequentia, oscillationes componentes ex toto deficiant iuxta peculiare planum, vel obtemperent peculiaribus condicionibus, quae causant polarizationes ellipticas vel circulares.

Problema ponebatur an ex principiis theoriae classicae colligi possent criteria ad statuendas regulas selectivas theoriae quanticae, necnon analogas regulas ad definiendas sive varias intensitates radiationum, sive earum status polarizationis.

Hoc problema sibi posuit Bohr ; et ipsum solvit redigendo « principium correspondentiae ».

58. Fundamentum principii correspondentiae: duplex congruentia inter frequentias quanticas et frequentias classicas.

a. Congruentia numerica.

Comparentur frequentiae quanticae, quas producere possunt varii possibiles saltus quantici inter distinctas orbitas (quanticas), et frequentiae classicae, quas producere possunt electrona percurrendo illas ipsas orbitas.

Hae duae collectiones frequentiarum congruunt sub aspectu numerico : iidem enim numeri illas distinguunt, ordinant, et numerant.

Comparationem instituamus considerando casum generaliorem motus multiperiodici non degeneris.

1. Considerentur in primis frequentiae classicae. Unicuique orbitae respondet integra collectio frequentiarum (fundamentalium et harmonicarum). Si systema m gaudet f gradibus libertatis, unaquaeque orbita definitur peculiari combinatione numerorum quanticorum :

$$n_1 \quad n_2 \quad n_3 \; . \; . \; . \; . \; . \quad n_f$$

quibus respondent totidem frequentiae fundamentales :

$$\nu_1 \quad \nu_2 \quad \nu_3 \; . \; . \; . \; . \; . \quad \nu_f$$

quae varie afficiuntur coëfficientibus integris :

$$k_1 \quad k_2 \quad k_3 \; . \; . \; . \; . \; . \quad k_f \qquad [k_i = 0, 1, 2 \; . \; . \; .]$$

quibus definiuntur frequentiae harmonicae varii ordinis.

Prout ostendit analysis motuum multiperiodicorum, producuntur variae frequentiae « harmonicae compositae », quae definiuntur una formula generali :

$$k_1 \, \nu_1 + k_2 \, \nu_2 + k_3 \, \nu_3 + \; . \; . \; . \; + k_f \, \nu_f$$

Pro variis combinationibus coëfficientium k colliguntur variae frequentiae possibiles. Si omnes series coëfficientium k sunt nullae, una excepta (k_i), colliguntur una frequentia fundamentalis ν_i et eius harmonicae simplices ; secus colliguntur frequentiae harmonicae compositae.

2. Considerentur secundo variae frequentiae quanticae possibiles, pro eadem collectione orbitarum.

Dum electron percurrit definitam orbitam, nullam radiationem emittit ; tamen, unicuique orbitae, quam definiunt numeri quantici :

$$n_1 \quad n_2 \quad n_3 \; . \; . \; . \; . \; . \quad n_f$$

referri potest tota collectio frequentiarum, quas producunt electrona variis saltibus quanticis, qui terminantur ad illam unam orbitam. Hi varii saltus definiuntur variis combinationibus possibilibus inter numeros integros :

$$k_1 \quad k_2 \quad k_3 \; . \; . \; . \; . \; . \quad k_f \qquad [k_i = 0, 1, 2 \; . \; . \; .]$$

3. Ex comparatione duarum collectionum frequentiarum colligimus earum congruentiam numericam ; nam :

pro unaquaque orbita, quam definiunt numeri quantici :

$$n_1 \quad n_2 \quad n_3 \; . \; . \; . \; . \; . \quad n_f$$

unicuique frequentiae harmonicae classicae :

$$k_1 \, \nu_1 + k_2 \, \nu_2 + k_3 \, \nu_3 + \; . \; . \; . \; + k_f \, \nu_f$$

respondet peculiaris frequentia quantica, cuius saltus quanticus definitur eadem serie coëfficientium :

$$k_1 \quad k_2 \quad k_3 \; . \; . \; . \; . \; . \quad k_f \qquad [k_i = 0, 1, 2 \ldots]$$

Consideravimus omnes frequentias possibiles, enumerando saltus quanticos arithmetice possibiles (seponendo quamvis

considerationem de regulis selectivis) ; sicut etiam (ad frequentias classicas quod attinet) consideravimus omnes frequentias harmonicas arithmetice possibiles (seponendo quamvis con siderationem de peculiari forma motus periodici, quae non admittat quaslibet frequentias harmonicas componentes). Propterea utraque collectio frequentiarum reapse delimitatur, quatenus (pro peculiaribus adiunctis systematum) plures coëfficientes k sunt nulli. Servatur vero congruentia numerica inter duas series frequentiarum vi principii correspondentiae (cfr. n. 59) ; Bohr enim conformavit regulas selectivas (quae delimitant saltus quanticos admissos) ad peculiarem structuram frequentiarum classicarum, quae (pariter ac structura motuum periodicorum electronum) potest non admittere nonnullas frequentias harmonicas.

b. Congruentia inter frequentias quanticas et frequentias classicas quoad ipsum valorem.

Generatim aliae frequentiae colliguntur si applicantur regulae quanticae, et aliae si applicantur regulae classicae. Tamen hi valores (quantici et classici) magis ac magis ad pares valores accedunt, et tandem funduntur in unam eamdemque seriem frequentiarum, quo altiores fiunt numeri quantici definientes systemata atomica.

Res facile declaratur si considerantur frequentiae (classicae et quanticae) pro simplicioribus motibus periodicis electronum; tales sunt motus rotatorii uniformes.

1. Considerentur in primis frequentiae classicae.

Elementa characteristica motus rotatorii uniformis sunt :

— E : seu energia systematis, quae est ipsa energia cinetica massae rotantis ;

— J : seu « modulus periodicus actionis », qui absolvitur pro unaquaque evolutione cyclica ;

— ν : seu frequentia rotationis.

Ex expressionibus autem energiae E et moduli J* facile

---

* $E = \frac{1}{2} I \omega^2$ $\quad I$ = momentum inertiae : mr^2
$J = 2\pi I \omega$ $\quad \omega$ = velocitas angul. : $2\pi/\tau = 2\pi\nu$

colligitur (iuxta regulas calculi differentialis) incrementum infinitesimum dE, quod competit energiae systematis, si ex quodam definito motu rotatorio (cuius frequentia est ν) transitus fit ad systema infinite proximum, propter infinitesimum incrementum dJ moduli actionis.

Ex his autem expressionibus colligitur relatio :

$$\nu = \frac{dE}{dJ}$$

Iuxta theoriam classicam, ipsa frequentia motus rotatorii exprimit etiam frequentiam radiationis.

Relatio analytica inter ν, dE, dJ potest graphice repraesentari (fig. 22). Ex expressionibus analyticis energiae E et

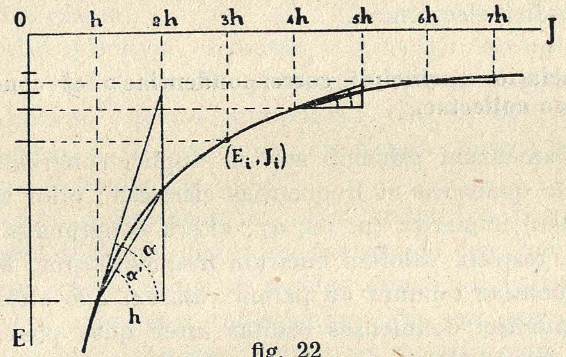


fig. 22

moduli actionis J, colligitur simplex relatio inter E et J, quae graphice repraesentatur linea curva figurae : haec linea, pro quolibet valore J_i, definit relativum valorem E_i.

Iamvero proportio dE/dJ, quae exprimit frequentiam ν, graphice repraesentatur tangente trigonometrica anguli α.

2. Repraesentetur in ipso diagrammate frequentia quantica, relativa saltui energetico a statu E_n ad ipsum statum energeticum E_0, pro quo iam notavimus frequentiam classicam.

Frequentia (quantica) est $\nu = \Delta E/h$; quare eius reprae-

Caput III

PROGRESSUS ANALYSIS SPECTROSCOPICAE ET INTERPRETATIONES QUANTICAE PHAENOMENORUM

Articulus I.

Lineae Spectrales Multiplae et Tertius Numerus Quanticus.

60. Termini spectroscopici et eorum interpretatio theorica.

Theoria quantica exhibet varias frequentias radiationum ut differentias inter binos terminos (ex. gr. : $R'/k^2 - R'/l^2$ - cfr. n. 48, b), qui singuli repraesentant quemdam gradum energeticum divisum per quantum actionis h ; seu, quod ad idem redit, hi termini constituunt totidem frequentias typicas, quarum differentiae sunt ipsae frequentiae quas elementa emittunt.

Spectroscopia, ut notavimus (cfr. n. 48, b), hos terminos empirice iam detexerat ad spectrum hydrogenii quod attinet ; notandum est solum discrimen practicum : spectroscopia radiationes designat notando non iam earum frequentias ν, sed «numerum undarum» (per cm.) $\bar{\nu} = \nu/c$; quare termini spectroscopici sunt totidem peculiares «numeri undarum», quorum differentiae sunt ipsi «numeri undarum» variarum radiationum.

Felix successus, quo Bohr interpretatus est terminos spectroscopicos hydrogenii, illos referendo ad totidem gradus energeticos atomi, suaserat etiam cetera spectra characteristica elementorum explicari posse eadem ratione.

Inde ab a. 1889, iam coeptum erat — methodo mere empirica — opus redigendi in distinctas classes radiationes diversorum elementorum ; principia autem interpretationis quanticae suppeditaverunt nova criteria indagationis.

Ipse Bohr, ex. gr., applicando sua criteria quantica, intuitus est quasdam series radiationum, permixtas spectro hydrogenii, tribuendas non esse hydrogenio (ut alii censuerant), sed permixtis atomis helii He^+, e quibus alterum electron avulsum erat.

Bohr apte etiam conscripserat (ut experimenta comprobarunt) generalem formulam definientem varias frequentias ionum positivorum helii (He^+) ; scilicet :

$$\nu = 4\,R\,c\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

quae formula differt ab analoga formula spectri hydrogenii quia pro R stat $4\,R$, ex eo quod numerus atomicus helii (qui numerat onera positiva nuclei, et qui in formula Bohr elevatur ad potentiam secundam) non est 1 (ut pro hydrogenio) sed 2.

Ex talibus formulis colliguntur generales typi sive terminorum spectroscopicorum, sive graduum energeticorum He^+:

$$T = \frac{4\,R}{n^2}\,; \qquad E = -\,T\,c\,h = -\,\frac{4\,R\,c\,h}{n^2}$$

61. Spectra optica metallorum alcalinorum: primae columnae systematis periodicis.

a. Notae empirice compertae.

Peculiari studio perpensa sunt spectra optica metallorum alcalinorum, quae similes sunt spectro atomi hydrogenii : quamvis enim constituantur pluribus stratibus electronum, tamen in stratu peripherico nonnisi unum electron habent (sicut H) ; iamvero ex solis electronibus periphericis pendent proprietates opticae (lineae spectrales in campo visibili), et chimicae (valentiae).

Ex analisi horum spectrorum sequentes notae collectae sunt :

1. Generalis typus terminorum spectroscopicorum:

$$T = \frac{R}{(n + a)^2} \qquad \begin{matrix}[n = \text{n.ri integri}:\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots.] \\ [a = \text{definitus n.rus characterist.}]\end{matrix}$$

Tales termini discrepant a terminis spectri hydrogenii quantenus numero integro n additur quidam valor a, qui denominatur « emendatio Rydberg » ; altera minor « emendatio », quam formulae exactiores complectuntur, solet negligi.

Quatuor praecipuae series terminorum distinguuntur pro quatuor distinctis valoribus tribuendis numero constanti a, qui designantur litteris $s\ p\ d\ f$; varii typi terminorum, prout continent « emendationes » $s\ p\ d\ f$, designantur symbolis $S\ P\ D\ F$.

2. Gradus energetici qui, respondent terminis spectroscopicis:

$$E = -T c h = -\frac{R c h}{(n + a)^2} \qquad \begin{matrix}[n = 1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .] \\ [a = s,\ p,\ d,\ f\ .\ .]\end{matrix}$$

Experimenta (methodo Franck Hertz peracta - cfr. n. 49, a) confirmant reapse dari in atomis hos gradus energeticos. Ad definiendas varias lineas spectrales (seu « numeros undarum » diversarum radiationum), non omnes termini promiscue et sine ulla regula combinari possunt ; sed varii termini dividendi sunt in series S, P, D, F ; termini autem primae seriei S non combinantur nisi cum terminis seriei subsequentis P ; termini P non combinantur nisi cum terminis serierum contiguarum P et D ; item termini D cum terminis serierum contiguarum P et F ; F cum D etc. ...

3. Quatuor series praecipuae frequentiarum:

series princeps $\quad \nu = \dfrac{R}{(3 + s)^2} - \dfrac{R}{(n + p)^2} \quad [n = 3,\ 4,\ 5\ .\ .]$

series diffusa $\quad \nu = \dfrac{R}{(3 + p)^2} - \dfrac{R}{(n + d)^2} \quad [n = 3,\ 4,\ 5\ .\ .]$

series arcta (scharf-sharp) $\quad \nu = \dfrac{R}{(3 + p)^2} - \dfrac{R}{(n + s)^2} \quad [n = 4,\ 5\ .\ .]$

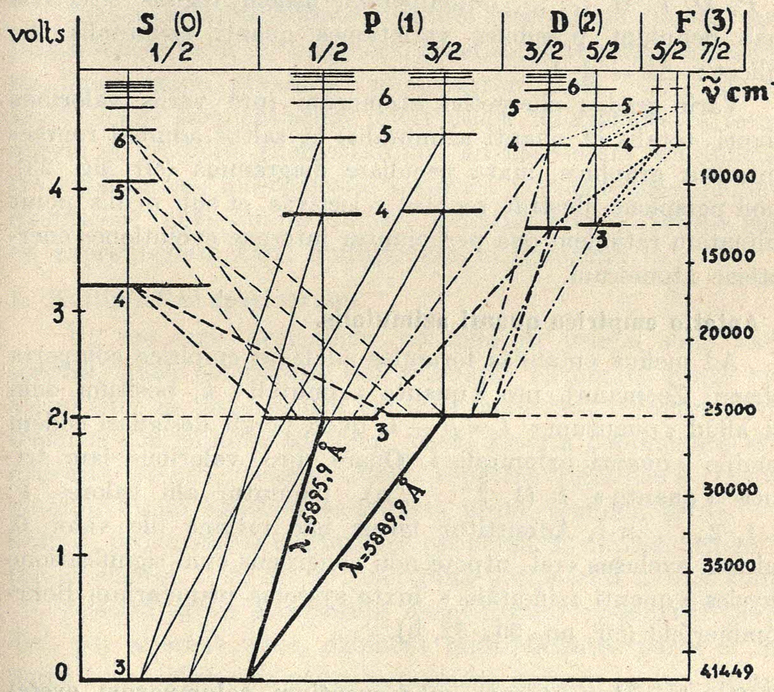
series fundamentalis $\quad \bar{\nu} = \dfrac{R}{(3 + d)^2} - \dfrac{R}{(n + f)^2} \quad [n = 4,\ 5\ .\ .\ .]$

b. Interpretatio quantica elementorum empiricorum.

1. « Quantum totale » et « quantum azimutale ».

Interpretatio quantica formularum empiricarum non ea est, quae (sicut pro spectro hydrogenii) valeat ad conscribendas ipsas formulas, illas colligendo ex principiis quanticis ; sed generaliori ratione refert frequentias radiationum ad internos saltus energeticos atomi, et exhibet distinctos gradus energe-

Gradus energetici et radiationes Natrii



series princeps

series arcta (scharf-sharp)

series diffusa

series fundamentalis

fig. 23

ticos ut definitos binis numeris quanticis, qui immutata denominatione dicuntur « quanta totalia » et « quanta azimutalia ».

Manifestae analogiae autem indicant « quanta totalia » constitui ipsis numeris n, inclusis in expressione terminorum T; « quanta azimutalia » autem ($k = 1, 2, 3, \ldots$) concipiuntur ut nexa (ignota quadam relatione) cum distinctis seriebus S, P, D, F terminorum, ita ut:

seriebus terminorum $S\ P\ D\ F\ G \ldots$
respondeant quanta k: $1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots$

variae enim combinationes, quae dari possunt inter terminos S, P, D, F, G, . . ., obtemperant iisdem regulis selectivis quae definiunt possibiles variationes quanti azimutalis k; scilicet: $\Delta k = \pm 1$.

Varii gradus energetici atomorum (pro variis valoribus quanti totalis et quanti azimutalis) et saltus admissi repraesentantur graphice, iuxta peculiare diagramma (cfr. fig. 23), quod perspicue illustrat regulas selectivas, et sub oculis ponit ordinatam rationem qua perficiuntur internae evolutiones energeticae atomorum.

2. Aptatio empirica quanti azimutalis.

Ad melius aptandas formulas ad facta empirice comperta (phaen. Zeemann), pro « quanto azimutali » k, positum dein est aliud « quantum » $l = k - 1$, quod pergit designari eodem nomine « quanti azimutalis ». Quare, pro valoribus iam tributis « quanto » k (1, 2, . . . n), ponuntur alii valores l: 0, 1, 2, . . .n-1. Admittitur igitur hac ratione ille valor 0, qui iam exclusus erat, utpote non congruens cum significatione physica « quanti azimutalis » iuxta systema planetarium Bohr-Sommerfeld (cfr. nn. 50 ; 52, b).

62. Spectra elementorum subsequentium columnarum systematis periodici.

a. Multiplicitas linearum spectralium.

Quae hucusque notavimus de analysi spectroscopica respiciunt spectra elementorum primae columnae systematis periodici.

Series autem linearum spectralium magis ac magis multiplices fiunt si considerantur elementa subsequentium columnarum ; adeo ut valde arduum iam fuerit detegere ordinatas structuras spectrorum ; principia vero interpretationis quanticae efficacia subsidia praebuerunt, et hodierna spectroscopia iam satis in ordinem redegit lineas spectrales omnium elementorum, illas referendo ad distinctas series terminorum spectroscopicorum.

Haec analysis spectroscopica etiam in lucem tulit peculiarem proprietatem generalem, quae plurimum contulit ad progressum physicae atomicae, et eius interpretationis quanticae.

Agitur de multiplicitate linearum spectralium : lineae, quae prima specie videntur simplices, constituuntur pluribus distinctis lineis valde proximis : numerantur 2, 3, . . . 8 lineae. Multiplicitas frequentiarum infert etiam multiplicitates terminorum et graduum energeticorum ; ad has autem multiplicitates explicandas, interpretatio quantica postulat alios numeros quanticos ; apti autem numeri quantici reapse definiti sunt ad exprimendam hanc multiplicitatem linearum.

b. Multiplicitas spectrorum.

Ut res satis declaretur, notanda in primis sunt varia spectra, quae competunt uni eidemque elemento, prout eius atomi sunt in statu neutro vel iona facta sunt. Propter media technica communiter adhibita, priora spectra denominata sunt « spectra arcus », cetera autem « spectra scintillae ». Distinguuntur etiam « spectra scintillae » primi, secundi, tertii, . . . ordinis, prout status ionizationis est simplex, duplex, triplex ... (prout scilicet 1, 2, 3, . . . electrona peripherica avulsa sunt).

Spectra arcus diversorum elementorum systematis periodici, per alternas vices, exhibent multiplicitates pares et impares : multiplicitates pares respondent numero impari electronum stratus periferici ; vicissim numero pari electronum respondent multiplicitates impares.

c. Relationes inter spectra et electrona peripherica.

Dictae leges confirmant spectra optica referenda esse electronibus periphericis; quod factum explicat etiam sequentes leges.

Elementa diversa producunt spectra analoga quoad structuras (nominatim quoad multiplicitates) quoties, propter diversos status ionizationis, idem factus est numerus electronum stratus peripherici. Propterea spectrum scintillae cuiuslibet elementi simile est spectro arcus elementi praecedentis in systemate periodico ; generalius, spectrum scintillae ordinis p elementi n.simi simile est spectro arcus elementi, cuius numerus atomicus est n-p. Iuxta has ipsas leges, producunt spectra analoga Na, Mg^{+}, Al^{++}, Si^{+++}.

63. Hypothesis de «electrone rotante»: «spinning electron».

Haec una hypothesis bene explicat omnes multiplicitates spectrales nuper indicatas. Hypothesis ipsa, quam a. 1925 proposuerunt Uhlenbeck et Goudsmit, sequentibus punctis absolvitur :

1. quodlibet electron rotatur circa proprium axem, qui parallelus est axi orbitae.
2. « momentum cineticum » huius rotationis constat dimidia unitate quantica ; seu, eius valor (absolutus) est $\frac{1}{2} \cdot h/2\pi$.
3. directio huius vectoris est (pro duobus sensibus oppositis rotationis) « parallela » vel « antiparallela » directioni momenti cinetici orbitalis $(l \cdot h/2\pi)$.
4. duo « momenta magnetica » respondent (iuxta leges classicas) duobus momentis cineticis ; quaedam anomalia autem (respectu legis classicae) admittenda est circa valorem momenti magnetici electronis rotantis (quae anomalia ceteroquin contingit etiam in peculiari phaenomeno macroscopico).

His proprietatibus et condicionibus admissis, pro uno gradu energetico electronis (definito binis numeris quanticis n, l) exstant duo gradus energetici aliquatenus diversi, prout accedit momentum cineticum electronis rotantis, parallelum $(+ \frac{1}{2} \cdot h/2\pi)$ vel antiparallelum $(- \frac{1}{2} \cdot h/2\pi)$.

Hae variationes energeticae contingunt quia momentum cineticum secumfert etiam momentum magneticum ; et quia « momentum magneticum » electronis rotantis (quod assimilat ipsum electron microscopico magneti) mergitur in campo magnetico quem electron producit suo motu orbitali circa nucleum.

Hi novi gradus energetici bene explicant multiplicitates spectrales etiam sub aspectu quantitativo : separationes enim linearum, seu distinctio frequentiarum, exacte respondet novis gradibus energeticis.

64. « Spin » et « Quantum internum ».

Ex dictis colligimus gradus energeticos diversorum electronum definiri non iam binis, sed ternis numeris quanticis :

n (q. totale) ; l (q. azimutale) ; s (spin $= \pm \frac{1}{2}$)

vel etiam, aequipollenti ratione, considerantur terni numeri :

$$n, \quad l, \quad j = l \pm \tfrac{1}{2} \text{ (quantum internum)}$$

Eximia aptitudo unius hypothesis de « electrone rotante » ad explicandas tam copiosas multiplicitates spectrales, prima fronte, videtur comprobare non solum novos gradus energeticos hac methodo definitos, sed etiam eorum interpretationem per rotationem electronis. Tamen contra hanc interpretationem exstant difficultates :

— in primis, dimidia unitas quantica (quae necessario introducenda est ad aptandam hypothesim experimentis) non cohaeret cum regulis quanticis a Bohr statutis ;

— dein talis velocitas rotationis colligitur, quae infert velocitates lineares maiores velocitate lucis ; omnis autem physica postrelativistica excludit tales velocitates.

Non obstantibus vero talibus difficultatibus, retinetur denominatio « electronis rotantis » ; et denomintaur « spin » numerus quanticus $s = \pm \frac{1}{2}$.

ARTICULUS II.

Decompisitio liearum spectralium et quartus numerus quanticus.

65. Phaenomenon Zeeman: ordinarium et extraordinarium.

a. Descriptio Phaenomeni.

Si fons lucis mergitur in campo magnetico H satis intenso, eius lineae spectrales, iam simplices, dividuntur in plures lineas, quae symmetrice separantur a pristina linea simplici, quae propterea media manet inter duas series symmetricas linearum (cfr. figg. 24, 26).

Novae radiationes exhibent etiam varios status polarizationis (rectilineae vel circularis), qui pari lege symmetrica producuntur hinc inde, respectu lineae mediae.

Separatio inter varias lineas spectrales augetur una cum intensitate campi H, iuxta fixam proportionem.

Si vero campus magneticus fit valde intensus, separatio linearum iam non perficitur iuxta eamdem simplicem legem ; et novum phaenomenon (Paschen-Back) producitur, de quo separatim dicemus (cfr. n. 69).

Phaenomenon Zeeman duplex est :

— ut plurimum producuntur multae lineae distinctae ; etiam 10 et ultra ;

— rarius producuntur tantum tres lineae ; scilicet, praeter pristinam lineam, quae manet, apparent hinc inde duae novae lineae, symmetrice separatae a linea media.

Hoc alterum phaenomenon, simplicius, cum prius detectum sit, denominatum est « ordinarium » ; alterum propterea denominatum est « extraordinarium », quamvis reapse sit longe communius.

b. Interpretationes phaenomeni.

1. Interpretatio classica.

Cum primo phaenomenon « ordinarium » detectum est, Lorentz statim illud explicavit ad normam electromagnetismi classici.

Haec interpretatio bene explicat omnes et singulas proprietates phaenomeni ordinarii ; scilicet :

— separationem symmetricam duarum novarum frequentiarum a pristina frequentia :

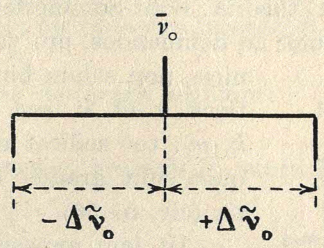


fig. 24

— duos status polarizationis novarum radiationum ; quae exhibent utraeque polarizationem circularem, sed in sensus oppositos, prout postulat generalis lex symmetriae ;

— proportionem inter variationem $|\Delta\bar{\nu}_0|$ frequentiarum et intensitatem H campi.

Non obstantibus vero his praerogativis, principia classica inepta manent ad interpretandum phaenomenon extraordinarium.

2. Interpretatio quantica.

De hac interpretatione latius dein dicendum erit. Pauca interim notemus :

Interpretatio phaenomeni ordinarii hybrida est, quia involvit etiam explicationem classicam, quam Lorentz produxerat et indiget subsidio cuiusdam regulae selectivae. Non obstante vero hoc defectu, sola interpretatio quantica valet ad explicandum etiam phaenomenon extraordinarium.

66. Interpretatio quantica phaenomeni Zeeman.

a. « Quantificatio spatialis » orbitarum.

Iuxta principia quantica, lineae spectrales multiplae postulant terminos spectroscopicos multiplos, et relativos gradus energeticos multiplos. Quare, ad explicandam novam multiplici-

tatem linearum, producendi sunt novi gradus energetici (per saltus distinctos), qui postulant novam seriem numerorum quanticorum, praeter « quantum totale » n et « quantum azimutale » k (vel, $l = k - 1$).

Ceterum, ipsa theoria Bohr-Sommerfeld, si sine limitatione applicatur, ducit ad definiendos, pro variis orbitis electronicis, non solum binos numeros quanticos n et k, sed ternos numeros n, k, m: tot scilicet numeros quanticos, quot sunt gradus libertatis systematis (cfr. n. 56).

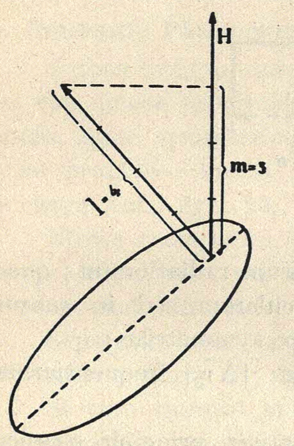


fig. 25

Ut iam expositum est:

— « quantum totale » n refert variationes (per saltus) axis maioris orbitae;

— « quantum azimutale » k refert variationes (per saltus) eccentricitatis orbitae; (eccentricitas enim orbitae variatur una cum « momento cinetico » azimutale electronis, quod exprimitur numero quantico k);

— « quantum magneticum » m refert varias inclinationes plani orbitae respectu directionis cuiusdam campi magnetici, qui numquam practice ex toto deest intra fines atomicos.*

---

*Campi magnetici, quorum respectu producenda est quantificatio spatialis orbitarum, numquam practice desunt, sicut non desunt proprietates magneticae atomorum: originem etiam ducunt ex variis motibus electronicis intraatomicis.

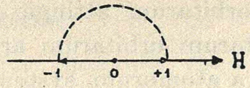
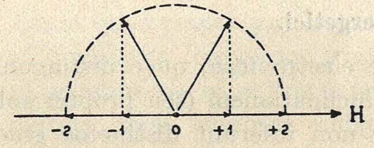
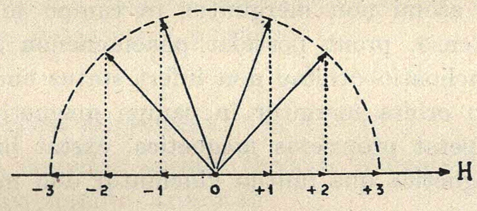
Confundendi non sunt tales campi, vel debilissimi, ad hunc finem sufficientes, cum campo magnetico externo, satis intenso, qui necessarius est ut producatur effectus Zeeman.

Quantificatio spatialis comprobata est experimentis quae perfecerunt Stern et Gerlach; talia experimenta probant dari in atomis proprietates magneticas, quarum directiones variantur per saltus; non probatur vero peculiaris interpretatio quae ponit causam harum proprietatum in definitis orbitis electricis. Experimenta Stern-Gerlach comparari possunt cum experimentis quae valent ad separanda varia isotopa, quorum massae variantur per saltus; in casu praesenti separantur atomi, quarum momenta magnetica exhibent directiones quae variantur per saltus.

b. Regula quae moderatur quantificationem spatialem.

« Momentum azimutale » k (qui exprimitur numero integro) illas solas directiones assumere potest, ob quas etiam eius proiectiones m supra directionem $\vec{H}$, exprimuntur numeris integris (fig. 25); hic numerus integer m est numerus quanticus magneticus. *

Exempla plane declarant regulam:

valores quanti azimutalis k	Proiectiones m vectoris k supra $\vec{H}$ m	Numerus distinctarum directionum vectoris k $2 \cdot k$	Numerus distinctarum orbitarum $2k-1$
1		2	1
2		4	3
3		6	5

Annotationes

1. Exclusa est proiectio $m = 0$, quia non congruit cum interpretatione physica systematis: postularet enim axem or-

---

* « Momentum cineticum » est magnitudo vectorialis, cui scilicet competit quaedam directio. Directio momenti cinetici (azimutalis) electronis congruit cum ipso axe orbitae; eius autem amplitudo exprimit maius vel minus momentum rotatorium electronis circa dictum axem (seu: $p = m \cdot v_\varphi r$), quod invariatum manet per totam revolutionem electronis. Pro theoria quantica, talis « vector » exprimitur numero integro, cuius unitates exprimunt todidem « momenta cinetica » (quantica) elementaria (seu: $h/2\pi$) (cfr. n. 50).

bitae (et consequenter ipsum axem magneticum) orthogonalem directioni H campi magnetici ; iamvero talis mutua positio campi magnetici et axis magnetici nequit censeri stabilis.

2. Si axis orbitae potest acquirere $2k$ distinctas directiones, numerus orbitarum distinctarum est $2k - 1$, quia duabus directionibus oppositis (iacentibus iuxta eamdem directionem campi) respondet una eademque orbita.

3. Pro variis valoribus 1, 2, 3... n quantis azimutalis, relativi numeri orbitarum sunt : 1, 3, 5... 2 n — 1 : constituunt scilicet seriem numerorum imparium.

Summa autem primorum n numerorum imparium semper est n^2 ; quare si (pro definito quanto totali n) quantum azimutale k acquirit omnes suos valores possibiles (1, 2, ... n), collectio omnium orbitarum attingit summam n^2.

Haec collectio distinctarum orbitarum arcte nectitur (ut declarabitur) cum structura atomorum systematis periodici*.

c. Distincti gradus energetici.

Distinctae orbitae electronicae, quae distinguuntur solum propter suam variam inclinationem (seu propter solam quantificationem spatialem), non inferunt distinctos gradus energeticos, usquedum atomi non merguntur in campo magnetico externo satis intenso, prout postulat phaenomenon Zeeman.

Sola enim inclinatio orbitae non infert status energeticos diversos ; si vero orbita mergitur in campo magnetico, cum ipsi orbitae competat proprietas magnetica, exstat illa peculiaris energia magnetica qua mutuo vinciuntur duo magnetes,

*Tale exemplar structurae atomicae (quod adhibet quantum azimutale k) modificandum erit (cfr. n. 66, d). Utile vero est ut non omnino seponatur, cum sit solum exemplar, quod absolvatur definitis lineamentis geometricis et mechanicis, quorum exactam imaginem nobis fingere possimus ; quare ceterae interpretationes structurae atomicae, quae (etsi magis verae) non gaudent pari perspicuitate, poterunt declarari ex comparatione cum hac ficta imagine. Quod eo potiori iure fit, quia, non obstantibus emendationibus introducendis, nonnullae conclusiones invariatae permanent : nominatim ea prae oculis retinenda est, quae numerat n^2 distinctas orbitas (vel, generalius, n^2 distinctos status electronum in compagine atomica) pro definito quanto totale n (cfr. n. 70, c).

et quae varia est pro variis angulis, quos efformant duo axes magnetici. Magis proprie nobis loquendum est de energia, quae competit cuidam momento magnetico M posito in campo magnetico H ; ipsa mensuratur producto $M \cdot H \cdot \cos \alpha$. Cum valde parva sint momenta magnetica atomica (quae componuntur paucis unitatibus elementaribus quanticis), etiam nova energia, quam acquirit atomus in campo H , valde parva manet, nisi satis elevetur intensitas campi.

Si vero campus magneticus fit satis intensus,* satis distinguuntur novi gradus energetici ; et consequenter satis distinguuntur etiam novae frequentiae.

d. Aptationes empiricae theoriae ad facta experimentis comperta.

1. Regulae selectivae.

Prout theoria elaborata est, ex variis combinationibus omnium novorum graduum energeticorum plures frequentiae colliguntur, quam quae reapse producuntur in effectu Zeeman.

Accedunt propterea consuetae regulae selectivae, quae secernunt saltus admissos et saltus interdictos.

Regula autem, quae empirice colligitur, haec est :

« quantum magneticum » nequit variari nisi una unitate, vel etiam immutatum permanet :

$$\Delta m = \pm 1 \quad \text{vel} \quad 0$$

2. « Quantum azimutale »: $l = k - 1$.

Alia empirica aptatio theoriae aliquatenus mutat valores tribuendos quanto azimutali :

pro pristinis valoribus $k = 1, 2 \ldots\ldots n$

ponuntur novi valores $l = 0, 1 \ldots\ldots n - 1 \quad (k - 1)$.

*Campus magneticus lente attingere debet suam altam intensitatem, ne deformet orbitas electronicas, et ex toto mutet sive gradus energeticos atomi, sive frequentias radiationum. Si vero paulatim statuitur, propter « invariantiam adiabaticam » modulorum actionum (cfr. n. 55, a), non mutantur numeri quantici definientes orbitas, et sic non producuntur frequentiae ex toto novae ; distinctae autem orbitae, varie inclinatae, paulatim acquirunt (pro mutatis adiunctis physicis) distinctos gradus energeticos, ita ut pristinae lineae spectrales simplices scindantur in plures lineas.

Haec emendatio valorum non mutat numerum ipsorum valorum, qui competunt « quanto azimutali » ; pro definito « quanto totali » n, sive k sive l assumere possunt n distinctos valores.

Haec ipsa emendatio valorum vero non cohaeret cum significatione physica, quae (iuxta exemplar atomicum Bohr-Sommerfeld) iam tributa erat « quanto azimutali » : ipsum exprimere debebat « momentum cineticum » vel « momentum angulare » electronis propter eius motum azimutalem circa nucleum. Propter hanc ipsam significationem, iam exclusus erat valor $k = 0$, quia dari nequit motus orbitalis circa nucleum, quovis « momento cinetico » destitutus. Nunc vero introducitur valor $l = 0$.

Consequens est ut status electronis, cui competat « quantum azimutale » nullum, iam nequeat repraesentari definita traiectoria. Hoc vero non impedit, quominus illustremus distinctos status physicos electronum (pro variis « quantis azimutalibus ») illos referendo ad distinctas orbitas, quas clare definivimus adhibendo « quantum azimutale » k (cfr. n. 66, b et nominatim notam).

3. « Quantum magneticum ».

Novum « quantum azimutale » $l = k - 1$ infert novos valores eius proiectionis supra directionem campi magnetici, seu novos valores « quanti magnetici » m.

Pro statutis valoribus :

$$-k \quad -(k-1) \;\ldots\; -1, \quad +1 \;\ldots\; +(k-1) \quad +k$$

ponendi iam sunt valores :

$$-l, -(l-1) \,.\,.\, -1, 0, +1 \,.\,.\, +(l-1), +l$$

Amittitur propterea valor ille $m = 0$, quia iam exclusus erat utpote non congruens cum significatione physica quanti magnetici (cfr. n. 66, b, Annotationem 1).

Imminuta etiam est series distinctorum valorum possibilium : pro $2 \cdot k$ distinctis valoribus iam recensitis, nunc recensentur $2l + 1 = 2(k-1) + 1 = 2k - 1$.

Invariati vero permanent (quoad numerum) distincti status physici electronum : recensentur $2l + 1$ distincti status, seu illi ipsi $2k - 1$ status, qui iam relati sunt ad $2k - 1$ distinctas orbitas (cfr. n. 66, b, et notam). Hi autem distincti gradus retinendi sunt, prout ipsa facta empirica postulant.

67. Integra collectio numerorum quanticorum.

a. Pro uno electrone peripherico.

Si simul colliguntur terni numeri quantici, respondentes tribus gradibus libertatis electronis propter suum motum orbitalem circa nucleum, et « spin » (seu numerus quanticus respondens novo gradui libertatis systematis, quem superaddit hypothesis de « electrone rotante »), quatuor distincti typi numerorum quanticorum obtinentur ; scilicet :

Quantum	valores possibiles	reg. selectivae
totale	$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$	
azimutale	$l = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$	$\Delta l = \pm 1$
magneticum	$m = -l \ldots -1, 0, +1 \ldots +l$	$\Delta m = \pm 1$ vel 0
spin	$s = +\frac{1}{2}, \; -\frac{1}{2}$	

N. B. Hypothesis de « spin » vel parallelo vel antiparallelo omnino congruit cum regulis de « quantificatione spatiali ».

Constans necessitas conformandi positiones theoricas ad facta empirica, introduxit etiam aliud schema numerorum quanticorum ad apte describendos varios gradus energeticos empirice compertos ; scilicet :

— duo momenta cinetica unius eiusdemque electronis (alterum azimutale, alterum internum : spin) in plurimis adiunctis, non considerantur seiunctim ; sed consideratur eius summa (vectorialis) $j = l + s$, quae semper est $l \pm \frac{1}{2}$. Talis novus numerus quanticus denominatus est « quantum internum ».

— quantificatio autem spatialis applicatur « quanto interno ».

Adicienda propterea est etiam sequens tabella :

Quantum	**valores possibiles**	**reg. selectivae**
totale	$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$	
azimutale	$l = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$	$\Delta l = \pm 1$
internum	$j = l \pm \frac{1}{2}$	$\Delta j = \pm 1$ vel 0
magneticum	$m = -j \ldots -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \ldots +j$	$\Delta m = \pm 1$ vel 0

b. Pro pluribus electronibus periphericis.

Si atomus continet plura electrona peripherica (quae sola partem habent in phaenomenis opticis), singulis electronibus competunt (pro unoquoque definito « quanto totali » n) terni numeri quantici :

$$n, \quad l_i, \quad s_i$$

Quantificatio autem spatialis applicatur toti systemati, quia reapse, nisi producantur peculiaria adiuncta (cfr. n. 69), varia momenta cinetica eiusdem compaginis electronicae componuntur inter se ita ut constituant unum systema, velut rigidum.

Regulae quibus perficitur quantificatio spatialis

1. in primis componuntur inter se (compositione vectoriali) varia momenta cinetica l_i et « spin » s_i, ita ut colligantur duo « momenta cinetica » totalia :

$$l = \Sigma\, l_i \qquad s = \Sigma\, s_i$$

2. dein colligitur « quantum internum » totale :

$$j = l + s$$

3. huic « quanto interno » applicatur quantificatio spatialis, ita ut colligantur varii valores « quanti magnetici », scilicet :

$$m = -j, \quad -(j-1) \ldots +(j-1) \quad +j$$

4. directiones distinctorum vectorum componentium l_i s_i supponuntur esse tales, ut colligatur, pro summa j, numerus vel integer vel semiinteger (numerus scilicet integer, auctus vel imminutus semiunitate).

5. ipsae regulae selectivae, iam definitae, afficiunt variationes tum quanti interni j, tum quanti magnetici m (in quibusdam adiunctis etiam saltus $0 \to 0$ interdicitur).

68. Theoria quantica de effectu Zeeman comparata cum experimentis.

a. Congruentiae.

Interpretatio quantica phaenomeni Zeeman explicat omnia eius lineamenta generalia (cfr. n. 65, b).

Agitur de interpretatione, quae hybrida est duplici de causa :

1. adhibet ipsam interpretationem classicam, ad definiendam proportionem inter separationem $\Delta\nu_0$ frequentiarum et intensitatem H campi magnetici (cfr. n. 65, b) ;

2. ut conformet suas conclusiones ad phaenomenon explicandum, indiget auxilio regulae selectivae (circa variationem quanti magnetici) ; quam regulam non colligit ex suis principiis, sed mutuatur ex criteriis classicis (cfr. n. 66, d, 1).

Sola vero interpretatio quantica valet ad explicandum etiam phaenomenon Zeeman extraordinarium (cfr. n. 66, b).

Speciatim nobis notandae sunt relationes, quas theoria quantica statuit inter effectum ordinarium et effectum extraordinarium ; hae ipsae relationes enim, quamvis ex parte ostendant quamdam congruentiam theoriae cum phaenomenis, manifestant etiam eius graviorem incongruentiam.

Interpretatio quantica explicat :

1. separationem plurium linearum spectralium, quae pro-

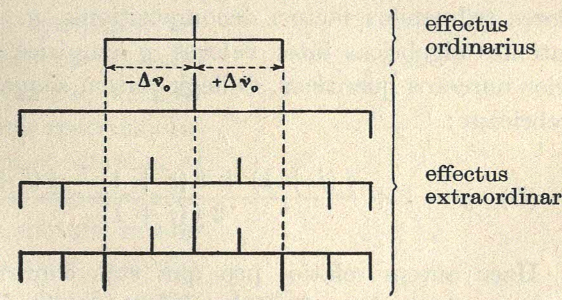


fig. 26

ducuntur modo symmetrico, respectu pristinae frequentiae; explicat etiam varios status polarizationis;

2. relationem simplicem inter effectum ordinarium et effectum extraordinarium, quatenus separationes $\Delta \nu$ in effectu extraordinario sunt multiplae rationales (generatim simplices) separationis $\Delta \nu_0$ effectus ordinarii (fig. 27):

NB. Tales relationes involvunt etiam proportionem inter separationes $\Delta \nu$ et intensitatem H campi magnetici: probata enim iam est proportio inter $\Delta \nu_0$ et H (cfr. n. 65, b).

Relatio inter separationes $\Delta \nu$ (effectus extraordinarii) et separationem $\Delta \nu_0$ (effectus ordinarii) exprimitur sequenti formula generali:

$$\Delta \nu = (m_1 g_1 - m_2 g_2)\, \Delta \nu_0$$

in qua formula m_1 et m_2 denotant quanta magnetica orbitarum inter quas fit saltus electronis; factor autem g (« factor decompositionis » Landé) definitam relationem habet cum ceteris numeris quanticis j, s, l (earumdem orbitarum) iuxta sequentem formulam algebricam:

$$\text{(q)} \qquad g = 1 + \frac{j^2 + s^2 - l^2}{2 j^2}$$

b. Incongruentiae.

1. Sub aspectu quantitativo.

Landé accuratissime mensuravit innumeras frequentias, quas phaenomenon Zeeman producit, ita ut empirice collegerit valores tribuendos factori decompositionis g. Dein perpendit relationes algebricas inter valores g empirice comprobatos et varios numeros quanticos. Collegit autem sequentem formulam algebricam:

$$\text{(L)} \quad g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Haec autem relatio, pro qua stat confirmatio empirica, discrepat ab analoga formula (q) theoretice collecta; quare,

sub aspectu quantitativo, allata interpretatio quantica non est nisi approximata.

NB. Duae formulae (q) et (L), iuxta principium correspondentiae, eo magis tendunt ad definiendos eosdem valores g, quo altiores fiunt numeri quantici.

2. Sub aspectu qualitativo.

Discrepantia inter theoriam et phaenomena gravior est sub aspectu qualitativo; ipsa formula (L) manifestavit talem discrepantiam: nequit enim formula Landé explicari, si numeri quantici (quos involvit) retinent illam significationem, quam ipsis tribuit interpretatio Bohr-Sommerfeld. Haec ipsa interpretatio theoretica propterea seponenda est.

69. Theoria quantica de effectu Paschen-Back.

Si campus magneticus, in quo merguntur atomi, fit valde intensus, effectus Zeeman vertitur in effectum Paschen-Back: separatio frequentiarum iam non pergit crescere definita proportione una cum intensitate campi, sed iuxta leges varias et multiplices.

Theoria quantica explicat hoc novum phaenomenon applicando eadem principia, quibus explicat effectum Zeeman.

Phaenomenon physicum, quod in utroque casu supponitur, stat in illa « praecessione Larmor » (quam Larmor collegit ex principiis electromagnetismi), quae producitur propter interactionem inter campum magneticum et proprietates magneticas atomi. Atomus, propter suas proprietates magneticas, haberi potest velut microscopicus magnes: eius axis efformat cum directione campi quemdam angulum α (cui competere possunt tantum definiti valores, iuxta leges quantificationis spatialis). Interactio autem inter campum et atomum efficit ut axis magnetici atomi ineat motum rotatorium periodicum circa directionem campi, describendo superficiem conicam (fig. 27).

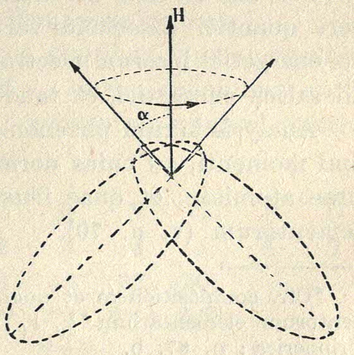


fig. 27

Haec interactio vero multifaria esse potest, quia ipsa proprietas magnetica atomi non est simplex. Singula enim electrona gaudent duobus « momentis magneticis », quae nectuntur cum duobus « momentis cineticis » (azimutale et « spin »). Quare totalis proprietas magnetica atomi est summa plurium proprietatum elementarium, quae singulae haberi possunt velut magnetes elementares.

Hisce suppositis, effectus Zeeman et effectus Paschen-Back distinguuntur propter varias possibiles actiones campi magnetici H in varias proprietates magneticas atomi.

Si campus magneticus H non est nimis intensus, producitur effectus Zeeman, quia maiori energia agunt inter se variae proprietates internae atomi, ita ut definita ratione componant unum systema magneticum, velut rigide nexum cum uno quanto interno totali j.* Vector totalis j init praecessionem Larmor, et ceteri vectores componentes rotantur cum una j, constanter efformando systema velut rigidum.

Si vero campus H paulatim crescit attingendo intensitates satis altas, eius actio in singula momenta magnetica elementaria atomi paulatim validior fit quam eorum mutuae actiones internae ; quare, variis in modis, distincta momenta magnetica elementaria atomi relaxare possunt sua mutua vincula, et seiunctim necti cum campo magnetico externo.

Consequens est ut varii vectores elementares l_i, s_i etiam singillatim ineant praecessionem Larmor ; tunc producitur effectus Paschen-Back.

Pro his mutatis adiunctis physicis, non exstant novi numeri quantici associandi variis electronibus, sed variantur gradus energetici ipsorum electronum ; consequenter producuntur alii saltus energetici, et tandem colliguntur aliae frequentiae.

Analysis horum phaenomenorum in lucem tulit legem maximi momenti, ad cuius normam componuntur internae structurae atomicae, et quae illustrant totum systema periodicum elementorum (v. n. 70).

*Cfr. compositionem et quantificationem spatialem variorum momentorum elementarium l_i, s_i cum atomus colligit plura electrona peripherica : n. 67, b.

70. Interna structura atomorum et Principium Pauli.

a. Numeri quantici et stratus energetici.

Numeri quantici, afficientes singula electrona atomorum, et relativi gradus energetici, nobis patefaciunt internam structuram atomorum.

Distinguuntur in primis, in compagine electronica atomorum, quidam praecipui gradus energetici, magis separati ab invicem : sunt illi ipsi stratus, quos Bohr sua prima analysi perspexit et distinxit variis valoribus « quanti totalis » n.

Hi vero stratus fundamentales non sunt simplices ; subsequentes analyses, perfectioribus subsidiis absolutae, distinxerunt alios et alios substratus energeticos, in quos dividuntur stratus fundamentales.

Alii stratus secundarii magis eminent : ii sunt, quos Sommerfeld distinxit adiciendo varios valores quanti azimutali k (quod iam notatur «quantum azimutale» l). Alii stratus subtiliores determinantur variis « spin ». Tandem alii stratus non solum subtiliores sunt, sed etiam transitorii : illis respondent varia « quanta magnetica » m ; sed distincti gradus energetici non exstant nisi cum atomi merguntur in campo magnetico.

b. Systema periodicum elementorum et stratus energetici.

Interna structura atomorum clariori luce illustrata est ex comparationibus inter numeros quanticos (definientes varios gradus energeticos) et numerum electronum, quae (prout ostendit tabula periodica) componunt illos ipsos stratus.

In sequenti tabella, pro variis stratibus fundamentalibus (qui designantur litteris K, L, M . . . et qui definiuntur variis « quantis totalibus » 1, 2, 3 . . .) indicantur numeri electronum, quae ipsos stratus complent :

Stratus	K	L	M	N	O	P	Q
Quantum n	1	2	3	4	5	6	7
N.rus max. electronum	2	8	18	32	(50)	. .	. .
i. e.	$2 \cdot 1^2$	$2 \cdot 2^2$	$2 \cdot 3^2$	$2 \cdot 4^2$	$2 \cdot 5^2$		
i. e.			$2 \cdot n^2$				

c. Principium Pauli et systema periodicum elementorum.

Maximus numerus electronum, quae complent quemdam definitum stratum *n*.simum) exprimitur formula (supra indicata) $2 \cdot n^2$; scilicet :

N.rus max.us electronum stratus n est : $2 \cdot n^2$ [n = quantum totale stratus

Eadem formula (ut facile demonstratur*) exprimit numerum maximum diversarum combinationum quaternorum numerorum :

$$n,\ l_i,\ m_i,\ s_i \quad \text{vel} \quad n,\ l_i,\ j_i,\ m_i$$

qui competere possunt electronibus eiusdem stratus n ; scilicet :

N.rus max.us diversarum serierum (n, l_i, m_i, s_i) est : $2 \cdot n^2$

Principium Pauli interpretatur aequalitatem duarum formularum ; sic autem enunciatur :

« In una eademque compagine electronica atomorum, nequeunt dari duo electrona, quibus competant iidem quaterni numeri quantici ».

---

*Consideremus series numerorum (n, l_i, m_i, s_i), qui afficiunt singula electrona, et qui in phaenomeno Paschen-Back disiunctim recensendi sunt (cfr. n. 69).

Pro unoquoque valore l_i (associato « quanto totali » n), tot diversae series n, l_i, m_i componi possunt, quot distincti valores competunt « quanto magnetico » m_i ; scilicet $(2 \cdot l_i + 1)$.

Quare, si l_i assumit omnes valores possibiles (0, 1 . . . n-1) summa omnium serierum (cfr. n. 66, b ; annotat. 3) est :

$$(2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + \dots + (2 \cdot n - 1) = 1 + 3 + 5 + \dots = n^2$$

Tandem numerus n^2 duplicandus est, quia unaquaeque series (n, l_i, s_i) bis ponenda est, propter distinctas adiectiones duorum « spin » s_i : sic componuntur $2 \cdot n^2$ series (n, l_i, m_i, s_i).

Idem numerus serierum colligitur si considerantur quaterni numeri quantici (n, l_i, j_i, m_i).

Numerus n^2 colligitur etiam si numerantur omnes diversae orbitae quae definiri possunt pristinis ternis numeris quanticis n, k_i, m_i (cfr. n. 66, b ; annotat. 2, 3).

Unicuique vero orbitae competunt duo distincti gradus energetici, pro duobus diversis « spin ». Hac ratione exemplar mechanicum atomi perspicue repraesentat (etsi imagine analogica) omnes $2 \cdot n^2$ distinctos gradus energeticos (cfr. n. 66, b : notam).

Consequens est ut tot electrona ad summum colligi possint in uno eodemque stratu n, quot diversae series numerorum quanticorum componi possunt, invariato manente « quanto totali » n.

Principium Pauli nonnisi a posteriori comprobatum est ; principia quantica illud non explicant.

Peculiari nota digna est significatio huius principii, quod in lucem ponit peculiarem unitatem compaginis atomicae : varii enim gradus energetici electronum mutuo ligantur severa interdependentia, quae neque exprimit condicionem mere mediam, seu statisticam, sed condicionem, quae servatur in singulis atomis.

Tandem principium Pauli illustrat structuram electronicam omnium atomorum systematis periodici :

— simplicissimae structurae atomorum H et He explent primum stratum K ($n = 1$), quia nonnisi duae diversae series numerorum quanticorum componi possunt si $n = 1$; quare etiam duo electrona iam complent stratum K.

— si tertium electron additur, ei iam locus non est in stratu K, et ascendere debet ad stratum superiorem L (n = 2); 8 electrona ad summum occupare possunt hunc stratum, quia non dantur nisi 8 combinationes diversae numerorum quanticorum si $n = 2$.

— hac lege paulatim complentur omnes stratus electronici : transitus ad elementum subsequens systematis periodici fit additione unius electronis, quod, si non invenit locum liberum (seu quaternos numeros quanticos liberos) in quodam stratu inferiori, necessario ascendit ad stratum superiorem.

— talibus processibus definiuntur etiam compositiones omnium et singulorum substratuum.

CONCLUSIONES

A

71. Incongruentiae theoriae.

a. Fundamenta theoriae involvunt contradictoria.

1. Fundamenta theoriae postulant contradictoria cum simul ponant :

— electrona non irradiare energiam dum percurrunt definitas orbitas ;

— valere, intra ipsos fines atomicos, tales leges electricas et magneticas, quae inferunt irradiationem electromagneticam propter motus oscillatorios electronum circa nucleum (cfr. n. 49, b).

2. Structura fundamentalis theoriae hybrida est : simul enim copulat principia classica et condicionem quanticam, quae postulat hypothesim anticlassicam (cfr. n. 16).

Insertio vero condicionis quanticae summa peritia tandem peracta est, ita ut distincta sint duo schemata mechanica, alterum pro phaenomenis classicis alterum pro phaenomenis quanticis, quorum neutrum simul applicat proprietates contrarias ; tamen collectio duorum systematum hybrida manet, et non consona praeceptis scientiae physicae, quae requirunt principia simplicia, et, quantum fieri potest, generalia (cfr. nn. 53 ; 54, d ; 55, c).

b. Aedificium constructum indiguit emendationibus et aptationibus quae non innituntur ipso fundamento aedificii.

1. Regulae selectivae, distinguentes saltus energeticos admissos et saltus prohibitos, primo positae sunt methodo mere empirica ut conclusiones theoreticae conformarentur ad facta experimentis comperta (cfr. nn. 52, a ; 66, d ; 67, a).

Dein ipsae regulae criterio theoretico collectae sunt, tamquam applicationes « principii correspondentiae » ; sed ipsum principium conceptum est ad complendam congenitam lacunam theoriae quanticae, et criteria ad illum definiendum hausta sunt ex lege classica de radiationibus, quam theoria quantica excludit (cfr. n. 59).

2. Valores tribuendi « quanto azimutali » et « quanto magnetico » empirice aptati sunt ad frequentias compertas ; admissi autem sunt peculiares valores nulli ($l = 0$; $m = 0$) qui non congruunt cum significatione physica, quam theoria illis numeris tribuit (cfr. nn. 66, d, 2, 3 ; 67, a).

3. Considerandae etiam sunt nonnullae aliae difficultates, quas posuerunt ipsae hypotheses, quae ceteroquin fructuose introductae sunt circa orbitas (cfr. nn. 52, 2 ; 56, b) et circa « spin » (cfr. nn. 63, 64).

c. Complementum ultimum aedificii patefecit eius non congruentiam cum datis empiricis.

Theoria magis ac magis elaborata est ut explicarentur multiplices structurae subtiles linearum spectralium, analysi spectroscopica detectae.

Explicatio vero quantica phaenomeni Zeeman, non solum hybrida est quia involvit etiam interpretationem classicam (cfr. n. 65, b), sed etiam non congruit cum datis empiricis ; haec autem incongruentia, minima sub aspectu quantitativo, gravis est sub aspectu qualitativo, quia manifestat radicalem incongruentiam inter exemplar atomicum excogitatum et veram structuram atomorum (cfr. 68, b).

B

72. Emolumenta theoriae.

a. Plures notitiae de structura atomorum, certe acquisitae.

1. Interni gradus energetici atomorum, per saltus distincti, rite comprobati sunt sive ob indubiam structuram quanticam radiationum, quarum frequentiae ($\varepsilon = \Delta E/h$) referunt internos saltus energeticos, sive ob phaenomenon inversum absorptionis energiae, quod et ipsum fit per quanta, prout probant experimenta Franck Hertz (cfr. nn. 48, a, b ; 50 ; 60 ; 62).

2. Internae structurae atomorum definitis rationibus nectuntur cum quaternis « numeris quanticis ». Diversi gradus energetici electronum referendi sunt ad diversas combinationes horum numerorum (cfr. nn. 47, b ; 48, a ; 50 ; 60 ; 61, b ; 63, 64 ; 66, a, b, c ; 67).

3. Structura atomorum peculiari unitate gaudet : eius partes mutua interdependentia ordinantur, ita ut, in una eademque compagine atomica, nequeant dari duo electrona, quorum quaterni numeri quantici sint ex toto iidem. Hac ipsa lege constituuntur diversi stratus energetici atomorum, et omnes compagines electronum omnium elementorum systematis periodici (cfr. n. 70, a, b, c).

4. Atomis competunt internae proprietates magneticae, distinctis directionibus praeditae, quae experimentis non dubiis comprobatae sunt, et quarum distinctio nectitur cum distinctis valoribus numerorum quanticorum (cfr . n. 66, a et notam).

5. Interna evolutio energetica atomorum definitis regulis obtemperat, quatenus numeri quantici (definientes statum initialem et terminum evolutionis) nequeunt variari sine certis regulis (cfr. n. 67, et fig. 23).

b. Nonnulla foecunda principia in lucem lata.

1. « Principium correspondentiae », cuius auxilio plura declarata sunt (cfr. n. 59) :

— structura quantica atomorum ad instar systematis planetarii secumfert quamdam congenitam lacunam circa intensitates radiationnm, et consequentes regulas selectivas ;

— theoria classica (undulatoria) de frequentiis radiationum continet aliquos aspectus veros, et ipsa complet dictam lacunam theoriae quanticae ;

— stat quaedam congruentia (quoad intensitates radiationum) inter aspectus quanticos et aspectus classicos phaenomenorum, non obstante comprobata nota anticlassica positionis quanticae.

2. « Principium invariantiae adiabaticae » modulorum periodicorum actionis, quod exhibet aliam congruentiam inter mechanicam quanticam et mechanicam classicam (cfr. n. 55, a).

3. « Principium exclusionis Pauli », quo illustrantur omnes compagines electronicae omnium elementorum systematis periodici (cfr. n. 70).

c. Subsidia magni pretii pro progressu scientiae.

1. Theoria quantica semiclassica fovit incrementa spectroscopiae et valida auxilia ei attulit (cfr. nn. 60 ; 61 ; 62).

2. Ipsa theoria, quamvis hybrida et imperfecta, suis ipsis inventis viam paravit et aperuit novissimis physicis quantisticis.

Ad hunc propositum speciatim notandum est momentum principii correspondentiae, quo usi sunt sive Schrödinger sive Heisenberg sibi proponendo talem redactionem novae microphysicae, quae paulatim congrueret cum descriptionibus classicis, quo magis systemata praetergrederentur fines microscopicos. Haec autem condicio comprobata est foecunda et necessaria.

SECTIO II

DE MECHANICA QUANTISTICA

73. Necessitas novae methodi.

Exordia physicae quanticae valde laboriosa fuerunt : nova hypothesis Planck negligi non poterat, et magis ac magis cum fructu applicabatur. Tamen, pro sua nota anticlassica, grave problema logicum posuerat : impar, per se solam, ad statuendum novum et adaequatum fundamentum novae physicae, necessario copulanda erat cum ipsis principiis classicis, quibus opponebatur.

In his adiunctis, prima theoria quantica nimia hybrida structura inficiabatur. Non obstante vero hoc congenito vitio, pecularia adiuncta (peritissime definita) quae siverant insertionem condicionis quanticae sine logica contradictione, nonnullae felices congruentiae, sedula comparatio cum factis empiricis analysi spectroscopica compertis, sagax usus principii correspondentiae, faverunt foecundae evolutioni illius theoriae quanticae semiclassicae, cuius primi auctores fuerunt Bohr et Sommerfeld.

Tanti et tam praeclari successus fere obliteraverant hybridam et suspectam originem methodi ; sed ineptitudo theoriae ad rite explicandum phaenomenon Zeeman, addita ceteris incongruentiis, confirmavit necessitatem excogitandi perfectiores solutiones problematis.

Annis 1925-1926, Heisenberg et Schrödinger, novas methodos felicissimo successu aggressi sunt, et recentiorem physicam condiderunt, quae « quantistica » denominata est.

Caput I

MECHANICA UNDULATORIA

Articulus I.

Aequationes Schrödinger

74. Criterium fundamentale ad componendas novas aequationes.

Schrödinger (1926-27), sagacissimo intuitu, novam solutionem problematis perspexit in analogiis mechanicis-opticis, quas ipsa physica classica iam manifestaverat (cfr. n. 44).

Aequationes opticae geometricae (definientes traiectorias radiorum) vertuntur in aequationes mechanicae classicae (definientes traiectorias puncti materialis) si, pro indice refractionis n, ponitur peculiaris expressio analytica, quae constituitur elementis mechanicis ; scilicet ponitur :

$$n = \sqrt{2\,m\,(E - U)}$$

Hae aequationes vero (sive opticae, sive mechanicae) apte describunt sola phaenomena macroscopica.

Si vero agitur de describendis microphaenomenis opticis, optica physica supplementum praestat opticae geometricae ; Schrödinger autem sibi proposuerat constructionem novae micromechanicae, quae analogum supplementum praestaret mechanicae classicae.

Si problema hac ratione solvi poterat, aequationes novae mechanicae colligendae erant ex aequationibus opticae physicae, in illis ponendo, pro indice refractionis n, aptam expressionem mechanicam.

75. Subsidia suppeditata a theoria undulatoria classica.

a. « Aequatio undarum » methodo calculi differentialis conscripta.

Natura motuum undulatoriorum varia esse potest : dantur undae acusticae, elasticae, luminosae, electromagneticae ; sed sicut una eademque linea sinusoidalis (vel magis varia) potest graphice omnes illas undas repraesentare, ita etiam una eademque « aequatio undarum » potest illos varios motus describere methodis analyticis ; alia vero et alia erit interpretatio physica eiusdem formulae.

Formula, qua descripsimus methodo elementari oscillationes harmonicas et earum propagationem (cfr. n. 24, c), facile illustrat significationem « aequationis undae », quam physica mathematica scribit adhibendo perfectiores methodos calculi differentialis (cfr. n. 54, a). « Aequatio undae », hac methodo redacta, est peculiaris aequatio differentialis, quae exprimit generaliores relationes analyticas quibus referuntur ad invicem variationes infinitesimae (respectu temporis et respectu spatii) peculiaris magnitudinis physicae, quae init motum oscillantem utcumque varium, qui etiam propagatur per spatium.

Haec aequatio breviter indicatur sequenti annotatione :

$$\Delta \Psi = n^2 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Littera Ψ indicat magnitudinem physicam, quae init motus undulatorios.

Symbolum Δ designat nonnullas operationes, perficiendas circa ipsam magnitudinem Ψ, quibus definiuntur variationes functionis Ψ respectu coordinatarum spatialium.

Symbolum $\partial^2/\partial t^2$ denotat analogas operationes, perficiendas circa eamdem magnitudinem Ψ, sed respectu temporis t.

Coëfficiens n nectitur cum velocitate, qua perturbatio undosa propagatur per spatium. Quare, si de undis luminosis agitur, n nectitur cum indice refractionis medii, vel (si unitates mensurae apte eliguntur) denotat ipsum indicem refractionis.

b. Functiones integrales aequationum differentialium.

Dicuntur functiones integrales aequationum differentialium eae functiones quae solvunt has aequationes; agitur propterea de functionibus quarum variationes infinitesimae obtemperant condicionibus et relationibus expressis aequatione differentiali; sed etiam agitur de functionibus, quae definiunt integrum phaenomenon, extensum ad totum campum (ex. gr.: ad totum campum spatii et temporis), et non iam perpensum in solis suis variationibus infinitesimis.

Formae functionum integralium diversissimae esse possunt, pro peculiaribus condicionibus phaenomi, quae inserendae sunt in expressione generali aequationis undae.

Tamquam typum functionis integralis prae oculis habere possumus ipsam descriptionem motus undulatorii, quam methodo elementari expressimus, adhibendo simplicem functionem sinusoidalem, vel summam functionum sinusoidalium (cfr. 26, a).

c. « Fasciculus undarum ».

Iam notavimus (cfr. n. 26, b) qua ratione « fasciculus undarum » (seu collectio plurium undarum, quarum frequentiae varientur modo continuo intra certum intervallum), sua ipsa propagatione per spatium, similitudinem exprimat motus mechanici corpusculi: producitur enim peculiare phaenomenon undulatorium, quasi punctiforme, quod progreditur per spatium.

Nova mechanica, quae motum corpusculorum describit methodo undulatoria, speciatim adhibet fasciculos undarum. Duae autem velocitates propagationis distinguendae sunt in his phaenomenis: « velocitas phasis » et « velocitas fasciculi ».

« Velocitas phasis » est velocitas qua propagantur per spatium singulae undae componentes.

Haec velocitas non necessario una eademque est pro omnibus undis fasciculi, sed varia esse potest pro variis frequentiis undarum; quod contingit cum medium est « dispersivum »: varii scilicet sunt indices refractionis pro variis frequentiis.

« Velocitas fasciculi » est velocitas qua transfertur per spatium punctum, in quo undae componentes producunt maximam amplitudinem motus undulatorii.

Si medium non est dispersivum, una eademque est velocitas phasis omnium undarum componentium; quare pari velocitate progreditur earum compositio, et « velocitas fasciculi » non distinguitur a « velocitate phasis ».

Si vero medium est dispersivum, « velocitas fasciculi » nequit simul aequare omnes et singulas velocitates phasis inter se diversas; quare « velocitati fasciculi » competit peculiaris distinctus valor.

Analysis mathematica definit relationem inter velocitatem fasciculi (v), frequentiam radiationis (ν), et longitudinem undae (λ). Iamvero definita velocitas v fasciculi obtineri potest pluribus combinationibus eorumdem parametrorum ν et λ.

Relatio analytica inter v, ν, λ involvit etiam relationem inter velocitatem v fasciculi et velocitatem (mediam) phasis w; nam $w = \nu \cdot \lambda$.

Notandum.

Ut motus fasciculi undarum plene repraesentet motum mechanicum puncti materialis, duae congruentiae requiruntur:

1. traiectoria fasciculi et traiectoria corpusculi eiusdem formae esse debent.

Huic vero condicioni satis fit (cfr. n. 44, c) si aequatio mechanica est ipsa aequatio undarum, in qua, pro indice refractionis N posita est expressio mechanica $C\sqrt{E = U}$ ($C =$ constans per spatium).

2. velocitas fasciculi et velocitas corpusculi pares esse debent.

— Si medium non est dispersivum, hae duae velocitates nequeunt esse aequales; nam in hac hypothesi, velocitas fasciculi aequat communem velocitatem phasis; haec autem variatur proportione inversa respectu indicis refractionis $C\sqrt{E - U}$; dum velocitas corpusculi augetur una cum expressione $\sqrt{E - U} = 1/2\ m \cdot v^2$.

— Si medium est dispersivum, duae velocitates pares fieri possunt: hanc possibilitatem ostendit relatio analytica inter v, w, ν, λ, una cum aequalitate $N = C\sqrt{E - U}$. Immo definita velocitas v colligi potest non una tantum combinatione parametrorum ν et λ. Generatim vero servanda est sequens condicio:

$$C = \frac{2 \cdot m}{a \cdot \nu} \qquad [a = \text{constans}]$$

NB. Coëfficienti C competit valor constans respectu spatii; hoc vero non impedit quominus valores diversi ei tribuantur pro diversis frequentiis radiationum. Talis autem expressio factoris C, quae infert diversos indices refractionis pro diversis frequentiis undarum, definit illam proprietatem dispersivam medii, quae necessaria probata est ad aequandas velocitates fasciculi et corpusculi.

76. Duae condiciones addendae ut problema recte solvatur.

a. Prior condicio exprimitur noto «principio correspondentiae». Cum descriptiones mechanicae classicae iam probatae sint congruere cum phaenomenis macroscopicis, nova descriptio phaenomenorum paulatim congruere debet cum ipsis descriptionibus classicis, quo magis phaenomena praetergrediuntur fines microscopicos.

Iamvero, ad hunc propositum, etiam motus ultimarum particularum (electronum, neutronum, protonum...), extra compaginem atomicam considerati, recensendi sunt inter phaenomena macroscopica, quae bene describuntur aequationibus classicis. Quare condicio, cui obtemperare debet apta redactio novae mechanicae undulatoriae, haec est: si undae (quibus describuntur motus mechanici) componunt fasciculum fere punctiformem, aptum ad representandum corpusculum elementare, motus huius fasciculi congruere debet cum motibus quas definiunt aequationes classicae.

Huic vero condicioni satis fit (ut in praecedenti paragrapho iam notatum est) si indici refractionis (quem aequatio undarum involvit) tribuitur sequens expressio:

$$N = \frac{\sqrt{2 \cdot m}}{a \cdot \nu}\sqrt{E - U}$$

b. Altera condicio respicit peculiarem relationem statuendam inter impulsum mechanicum $(m \cdot v)$ corpusculi et longitudinem (mediam) λ undae associandae corpusculo; statuenda scilicet est ea ipsa relatio, qua referuntur ad invicem impulsus photonis et longitudo undae ipsi photoni associatae: sic enim servatur analogia inter phaenomena mechanica et optica. Haec condicio ducit etiam ad definiendas easdem longitudines undarum, quas De Broglie iam associaverat corpusculis.

Huic alteri condicioni satis fit si, in expressione indicis refractionis, ponitur:

$$a = h \qquad [h = \text{const. Planck}]$$

Etenim: colligenda est expressio:

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad [p = \text{impulsus}]$$

seu (pro undis associandis corpusculis):

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} \qquad [p = \text{impulsus} = m \cdot v]$$

Iamvero, posita aequalitate $a = h$, index refractionis scribitur:

$$N = \frac{\sqrt{2\,m}}{h \cdot \nu}\sqrt{E - U}$$

ex qua expressione colligimus:

$$\lambda = \frac{w}{\nu} = \frac{1/N}{\nu} = \frac{h}{\sqrt{2\,m\,(E - U)}} =$$

$$= \frac{h}{m \cdot v} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} &2m\,(E-U) \\ &= 2m\ \tfrac{1}{2}\,mv^2 \\ &= m^2\,v^2 \end{aligned}$$

NB. Hac ratione insertum est quantum actionis *h*, et eius relatio cum frequentia undae et energia systematis.

77. Aequationes Schrödinger.

a. « Aequatio fundamentalis ».

Pro methodo, quam Schrödinger sibi proposuerat, aequatio fundamentalis novae mechanicae colligenda erat ex classica aequatione undarum, in qua, pro indice refractionis, ponenda erat apta expressio mechanica.

Ut problema rite solveretur, plures condiciones additae sunt, quae tandem dederunt indici refractionis sequentem expressionem :

$$N = \frac{\sqrt{2 \cdot m}}{h \cdot \nu} \sqrt{E - U}$$

quae expressio, si inseritur in annotatione symbolica aequationis undarum :

$$\Delta \Psi = N^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

dat :

$$\Delta \Psi = \frac{2 \cdot m}{h^2 \cdot \nu^2} (E - U) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Talis expressio, cum involvat definitam frequentiam ν, directe non respicit nisi phaenomena simpliciora, pro quibus functio Ψ est functio sinusoidalis temporis, quae nonnisi una frequentia ν definitur. Sed, propter haec ipsa adiuncta, regulae calculi possunt facile colligere aliam generaliorem expressionem, sub qua exhibetur famosa « aequatio fundamentalis » Schrödinger :

$$\text{(f)} \qquad \Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U)\, \Psi = 0$$

Non scripsimus nisi annotationem symbolicam aequationis ; completa aequatio Schrödinger colligitur ex breviori annotatione (f) si, pro symbolo Δ, explicite indicantur variae operationes quae perficiendae sunt circa functionem Ψ.

Aequatio (f) exprimit generaliores condiciones, quibus obtemperare debet functio Ψ ; expressiones magis particulares, quae respondent variis peculiaribus phaenomenis, colliguntur ex generaliori expressione (f) si in ipsa inscribuntur expressiones magis definitae, quae (pro adiunctis) competunt energiae totali *E* systematis, et eius energiae potentiali *U*.

b. « Aequatio temporalis ».

Aequatio fundamentalis (f) involvit definitum statum energeticum *E* systematis ; quare directe non describit nisi status energeticos stationarios.

Sed regulae calculi differentialis medium praestant ad colligendam ex aequatione (f) aliam aequationem, quae iam non indicat ullum definitum statum energeticum, et quae propterea definit generaliores condiciones, quibus obtemperare debent etiam complexiora systemata energetica, necnon eorum evolutiones energeticae.

Haec altera aequatio, quae « temporalis » denominata est, scribitur :

$$\text{(t)} \qquad \Delta \Psi - \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot m}{h^2} U \cdot \Psi = - \frac{4\pi \cdot i \cdot m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

78. Comprobationes aequationum Schrödinger.

a. Indoles comprobationum.

Schrödinger non sine acutissimis intuitionibus conscripsit et quasi divinavit suas aequationes ; tamen criteria, quae applicaverat, non talia erant, quae valerent ad commendandas a priori ipsas aequationes, perinde ac si ageretur de conclusionibus logica necessitate collectis ex principiis iam satis comprobatis.

Propterea aequationes Schrödinger necessario comprobandae erant a posteriori ; comprobanda scilicet erat earum

aptitudo ad describenda microphaenomena mechanica. Quae aptitudo reapse confirmata est, et eximia est.

Minuta expositio harum comprobationum postulat amplam et non facilem tractationem mathematicam ; sed, pro fine philosophico quem spectamus, praetermittere possumus omnia ea ratiocinia, quae nullum novum principium ponunt et perficiuntur severa logica mathematica ; satis erit eorum indolem declarare et conclusiones recensere. Si quando vero introducuntur nova principia vel criteria, haec speciatim notanda et perpendenda erunt.

b. Comprobationes collectae ex descriptione compaginis electronum in atomis.

Si aequationes Schrödinger applicantur ad describendam compaginem electronum in atomis, miro modo colliguntur omnes eius notae characteristicae : gradus energetici ; numeri quantici, definientes ipsos gradus energeticos ; frequentiae radiationum, necnon earum intensitates et status polarizationis. Haec omnia autem ad amussim congruunt cum datis empiricis, etiam sub aspectu quantitativo.

De singulis praecipua notemus.

1. Gradus energetici.

Aequatio (f), sua ipsa structura, determinat varios gradus energeticos, per saltus distinctos, qui tribuendi sunt electronibus.

Sufficit ut in ipsa aequatione inscribatur peculiaris expressio quae (pro systemate de quo agitur) competit energiae potentiali U electronis (ex. gr., si de atomis hydrogenoidis agitur : $U = - Z \cdot e^2/r$) ; et colligitur talis aequatio, quae non admittit solutiones nisi in ipsa inscribantur, pro energia totali E, definiti et distincti valores E_i, qui reapse congruunt cum gradibus energeticis empirice compertis.

Valores E_i, quos aequatio (f) postulat pro sua ipsa structura, dicuntur « autovalores » aequationis.

2. Numeri quantici.

Autovalores E_i involvunt, in sua expressione analytica, nonnullos numeros integros, qui idem munus absolvunt quam numeri quantici theoriae Bohr-Sommerfeld :

— sunt enim numeri integri ; et propterea, suis variationibus per unitates integras, determinant autovalores (seu gradus energeticos) per saltus distinctos ;

— insuper exhibent inter se easdem relationes quam numeri quantici n, l, m veteris theoriae.

Valores, quos ipsa structura aequationis postulat pro his numeris, optime congruunt cum datis empiricis ; nominatim postulantur etiam hi peculiares valores $l = 0$ et $m = 0$, quos theoria semiclassica artificiose introduxerat (et non sine internis incongruentiis) ut suas conclusiones aptaret factis empiricis.

Novi numeri quantici mechanicae undulatoriae pergunt notari iisdem litteris n, l, m et denominari « quantum totale », « quantum azimutale », « quantum magneticum », quamvis exhuerint peculiares illas interpretationes mechanicas, quas prior theoria illis tribuerat.

Iuxta novam theoriam, hi numeri exstant ut tot parametra numerica necessaria ad definiendos aptos autovalores E_i. Comparandi etiam sunt cum numeris qui, in phaenomenis undulatoriis stationariis, numerant nodos oscillationum. Haec analogia facile intelligitur quia solutiones aequationis (f), qui dictos numeros postulant, formam undulatoriam habent et respiciunt status energeticos stationarios E_i. Ipsa analogia declarat etiam cur exstent plures series numerorum quanticorum : si enim phaenomenon oscillatorium stationarium evolvitur per spatium (et non producitur tantum iuxta unam lineam), non distinguuntur sola puncta nodalia, sed etiam superficies nodales ; et distinguuntur etiam plures series harum superficierum, pro varia earum forma : sphaerica, conica, plana...

3. Frequentiae radiationum.

Si status energeticus atomi non est stationarius, sed evolvitur a gradu E_n ad gradum E_m, solutio aequationis tempo-

ralis (t) exhibet peculiarem combinationem duorum statuum, quae involvit definitionem frequentiae radiationis emissae ; quae est :

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h}$$

Est ipsa definitio frequentiarum, quam Bohr postulaverat. Dum vero theoria Bohr, ad tales frequentias colligendas, duas distinctas condiciones quanticas posuerat (alteram mechanicam ad quantificanda systemata ; alteram opticam), mechanica undulatoria ex iisdem principiis colligit sive quantificationem systematum, sive frequentias radiationum.

4. Intensitates linearum spectralium et status polarizationis. Regulae selectivae.

Aequationes Schrödinger, suis solutionibus notitias comparant etiam de intensitate linearum spectralium, et de earum statu polarizationis, necnon de regulis selectivis, quae moderantur variationes numerorum quanticorum cum mutatur status energeticus electronis.

Agitur de illis notitiis, quas theoria quantica semiclassica nullatenus repetere potuerat ex suis principiis, sed mutuata erat (vi principii correspondentiae) a classica interpretatione undulatoria radiationum. Nova vero theoria, quae utitur functionibus undulatoriis ad describenda phaenomena mechanica, haurit has notitias ex ipsis suis principiis.

Notandum.

Ut construatur mechanica undulatoria, quae referat omnia phaenomena spectroscopica (non negligendo structuras subtiles linearum, iam tributas variationi relativisticae massae electronis, et « spin ») non sufficit una simplex aequatio Schrödinger, sed (ut Dirac demonstravit) requiritur collectio quattuor functionum Ψ.

Articulus II.

Interpretatio functionis Ψ

A. Interpretatio physica.

80. Sensus quaestionis.

Aequationes Schrödinger manifesto constituunt eximium instrumentum mathematicum, aptissimum ad solvenda problemata atomica. Si comparatur cum theoria quantica semiclassica, patet eius praestantia : expers enim est quavis interna incongruentia vel hybrida structura ; omnes conclusiones colligit ex propriis principiis ; complet lacunas prioris theoriae, quoad notitias circa intensitates radiationum et regulas selectivas ; tandem elementa theoretice definita exacte congruunt cum datis empiricis.

Tam multifaria et tam absoluta congruentia theoriae cum phaenomenis describendis quaestionem ponit de significatione physica magnitudinis Ψ, quae introducta est ad describenda methodo undulatoria microphaenomena mechanica.

Quaeritur scilicet quidnam detur in structuris et internis motibus atomorum, quod evolvatur lege undulatoria, et cuius valores exprimantur ipsa functione Ψ.

Agitur de definienda quadam magnitudine physica, quae in phaenomenis atomicis absolvat analogum munus, quod absolvunt ex. gr. densitas molecularum in phaenomeno undarum acusticarum, vel deformationes et tensiones corporum in vibrationibus elasticis, vel tensiones electricae et magneticae in oscillationibus electromagneticis.

Haec ipsa exempla ostendunt magnitudines huiusmodi esse posse sive « vectoriales » (quibus competit etiam directio) sive mere « scalares ». Schrödinger, introducens suam functionem Ψ, cogitaverat de quadam magnitudine scalari.

Notandum.

Parametra, quae concurrunt ad definiendam functionem Ψ, generatim plura sunt, ita ut eorum collectio nequeat simul

repraesentari in spatio tridimensionali. Insuper ipsa functio Ψ exprimitur numeris complexis, qui complectuntur partem realem et partem imaginariam (cuius unitas ex conventione definitur $\sqrt{-1}$). Haec vero adiuncta non impediunt per se interpretationem physicam functionis Ψ, etiamsi postulent interpretationem indirectam et complexam, quae nequeat reprasesentari uno diagrammate in spatio tridimensionali. *

81. Interpretatio quam initio ipse Schrödinger proposuerat.

a. Criterium fundamentale.

Schrödinger talem interpretationem quaesivit functionis Ψ, quae valeret ad duas quaestiones solvendas, quas theoria Bohr-Sommerfeld insolutas reliquerat :

1. Bohr postulaverat electron nullam energiam irradiare inter suam revolutionem circa nucleum, sed retinere statum energeticum stationarium.

Huic vero postulato obstabat ipsa structura atomi excogitata : tales enim proprietates electricae et magneticae explicite tribuebantur electroni (in ipsa compagine atomica), quae inferebant irradiationem electromagneticam propter motum (orbitalem) electronis (cfr. 49, b).

Propterea tale postulatum contradictoria copulabat, et nullatenus explicabat status energeticos stationarios electronum.

*Numeri complexi, non obstante parte imaginaria, optime adhiberi possunt, et reapse adhibentur, ad describenda elementa realia (sive geometrica, sive physica). Nominatim electrotechnica illis utitur ad describendas : functiones sinusoidales ; magnitudines physicas, quibus competunt phases cyclicae ; proprietates circuitorum electricorum.

Peculiare elementum numeri complexi nobis notandum est : « modulus » numeri complexi. Si unda sinusoidalis exprimitur numeris complexis, « modulus » exprimit amplitudinem undae. Ut dein explicabitur, modulus functionis complexae (qui notatur symbolo $|\Psi|$) absolvit in mechanica undulatoria analogum munus quam amplitudo undae A in synthesi corpusculari-undulatoria de natura lucis : A^2 enim exprimit intensitatem (statisticam) illuminationis, vel etiam probabilitatem inveniendi singula photona ; $|\Psi|^2$ exprimit intensitatem (statisticam) peculiaris nubis electronicae, vel etiam probabilitatem inveniendi singula electrona.

2. Structura atomorum, prout iam elaborata erat, nullatenus declarabat processus per quos perficerentur saltus energetici electronum ; consequenter nullam notitiam hauriebat ex suis ipsis principiis de intensitate linearum spectralium, quae variae sunt prout relativi saltus energetici maiori vel minori frequentia producuntur. Pari de causa non explicabantur varii status polarizationis radiationum, et nominatim regulae selectivae, quae delimitant modos, quibus numeri quantici variari possunt per saltus energeticos.

b. Hypotheses postulatae.

Schrödinger, ad finem sibi propositum, sequentes hypotheses postulavit :

1. Electron, in compagine atomica, exhuit naturam punctiformem et fit nubes electrica diffusa, circumdans nucleum, cuius densitas varia est.

2. Functio Ψ — proprie potentia secunda $|\Psi|^2$ eius moduli — definit variam densitatem huius nubis electricitatis. Haec positio analogiam statuit inter $|\Psi|^2$ et potentiam secundam A^2 amplitudinis undae, qua theoria undulatoria definit intensitatem radiationum.

3. Si densitas nubis electricae variatur, producit irradiationes electromagneticas iuxta ipsas leges electromagnetismi classici : quare frequentia radiationis est ipsa frequentia, qua vibrat densitas nubis electricae.

c. Elaboratio theoriae.

1. Si electron perseverat in definito statu energetico E_i, forma functionis Ψ colligenda est ex integratione aequationis (f), quae respicit definitos status energeticos.

Forma functionis Ψ varia est pro peculiaribus condicionibus physicis systematis inscriptis in generali aequatione (f). Quaedam eius lineamenta generalia facile definiuntur :

— agitur in primis de quadam functione undulatoria, cui competit definita frequentia ν : est ipsa frequentia $\nu = E_i/h$, quae involvitur in structura aequationis (f) ;

— cum densitas nubis invariata perseveret in singulis punctis (secus irradiaret energiam, et iam non ageretur de

statu stationario), functio undulatoria necessario describit peculiare phaenomenon undulatorium stationarium.

Exemplum illustrans theoriam.

Forma nubis electricae quam maxime perspicua fit si agitur de simplicissima atomo hydrogenii, in statu energetico fundamentali ($n = 1$; $l = 0$; $m = 0$). In his adiunctis, densitas nubis exhibet symmetriam sphaericam : nulla est prope nucleum ; dein augetur modo continuo ; attingit valores satis altos per stratum sphaericum, cuius radius (medius) eiusdem ordinis est quam prima orbita fundamentalis Bohr ; praeter hunc stratum, densitas nubis statim decrescit et evanescit, quamvis theoretice in indefinitum extendatur.

Pro aliis statibus energeticis electronis (aliis numeris quanticis definitis), forma nubis electricae variatur. Dantur vero combinationes numerorum quanticorum quae servant symmetriam sphaericam nubis : producuntur varii stratus sphaerici concentrici, maiori densitate praediti, quorum radii (medii) respondent (sed non aequantur) radiis variarum orbitarum fundamentalium Bohr. Inter hos stratus producuntur superficies sphaericae nodales, iuxta quas densitas nubis est nulla; numeri vero quantici, definientes statum energeticum, nexus habent cum numero talium superficierum nodalium.

2. Si electron transit a statu energetico E_n ad statum E_m, forma functionis Ψ colligenda est ex integratione aequationis temporalis (t), quae non respicit status mere stationarios.

Peculiares formae nubis electricae (quae colliguntur pro variis structuris atomicis et pro variis saltibus energeticis) iam non sunt stationariae, sed exhibent motus vibratorios, quorum frequentia aequat differentiam inter duas frequentias proprias E_n/h et E_m/h duorum statuum, inter quos evolvitur atomus.*

* Phaenomenon comparari potest cum noto phaenomeno, quod producitur cum superponuntur duae undae, constanti amplitudine praeditae, quarum frequentiae ν_1 et ν_2 discrepent inter se: earum summa gignit undam, cuius amplitudo iam non est constans, sed variatur frequentia $\nu = |\nu_1 - \nu_2|$.

Colliguntur propterea illae ipsae frequentiae :

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h}$$

quas postulat theoria quantica, et quas analysis spectroscopica iam reppererat.

3. Hisce positis, sufficit ut accedat hypothesis illa auxiliaris, quae postulat vibrationes nubis electricae producere irradiationes iuxta leges electromagnetismi, ut constituatur exemplar atomi, quod explicet frequentias radiationum.

4. Schrödinger, applicando ipsas leges electromagnetismi, collegit ex tali exemplare atomico etiam intensitates radiationum ; quae intensitates, hac ratione theoretice definitae, congruunt cum intensitatibus empirice compertis.

Ad tales intensitates exprimendas adhibentur peculiares coëfficientes (generatim complexi), qui pendent ex structura characteristica atomorum et ex peculiaribus statibus energeticis inter quos atomi evolvuntur ; ipsi coëfficientes exprimunt amplitudines variarum vibrationum nubis electricae atomorum.

Tales coëfficientes colliguntur ex ipsa structura functionis Ψ iuxta definitas regulas calculi, quae comparari possunt cum regulis, quibus analysis Fourier colligit ex structura cuiusvis motus periodici amplitudines proprias variarum vibrationum componentium. Istae amplitudines (iuxta theoriam undulatoriam classicam) referebant intensitates variarum radiationum ; hoc ipsum munus absolvunt (in nova mechanica undulatoria) dicti coëfficientes.

Ipsae regulae calculi valent ad definiendos etiam status polarizationis, necnon regulas selectivas, quae declarant conditiones, quibus obtemperare debent variationes numerorum quanticorum ut colligantur intensitates non nullae.

d. Conclusiones.

Quae exposita sunt in praecedenti paragrapho iam satis ostendunt Schrödinger reapse solvisse problema, quod sibi proposuerat :

1. explicatur cur electron, in statu energetico stationario constitutum, non irradiet energiam ;

2. explicatur cur electron, dum transit a statu E_n ad statum E_m, producat irradiationem electromagneticam, cuius frequentia sit $\Delta E\,(nm)/h$.

3. pro peculiari forma quae competit functioni Ψ, definiuntur :

— intensitates variarum radiationum ;

— status polarizationis ipsarum radiationum ;

— « regulae selectivae », definientes peculiares variationes numerorum quanticorum, quae sinunt intensitates non nullas radiationum.

4. Ad inopinatam synthesim revocantur condiciones quanticae et leges electromagnetismi. Nominatim nota discontinua structurae quanticae et numeri quantici (qui illam determinant) colliguntur ex ipsa descriptione continua undulatoria, quatenus phaenomena oscillantia stationaria involvunt superficies nodales, quae separant distinctas partes phaenomeni, et quae numeris integris numerantur.

82. Functio Ψ non recensetur inter entia physica « observabilia ».

Interpretatio functionis Ψ, a Schrödinger initio proposita, procul dubio foecunda fuit ; tamen ob nonnullas difficultates seposita est.

Quaedam argumenta, prout solent exponi, non videntur nimis valida, vel saltem videntur postulare profundiores discussiones ne proposita interpretatio functionis Ψ videatur potius excludi ob praeiudicia philosophica, quae nesciunt concipere profundas transformationes internas rerum, permanentiam virtualem proprietatum, causas efficientes determinatas ad peculiares fines. Sed opus non est ut has subtiliores quaestiones evolvamus, cum etiam alia argumenta stent, et ipse Schrödinger reliquerit suam interpretationem et acceptaverit novam interpretationem, de qua dicemus in sequentibus paragraphis. Expositio vero interpretationis Schrödinger necessaria manet ad ipsam novam interpretationem declarandam.

Nova interpretatio est interpretatio formalis et non physica ; quare problema de interpretatione physica functionis Ψ insolutum manet. Et physici illud iam non considerant, quia non recensent functionem Ψ inter entia physica « observabilia ».

Nota est condicio, quam Heisenberg postulavit ut quaevis entia recenseri possint inter entia physica : requiritur ut « observari » possint ; seu requiruntur « definitiones operativae » ipsorum entium ; definiendae scilicet sunt quaedam experimenta apta ad illa entia comprobanda.

Experimenta huiusmodi possunt esse mere idealia : talia scilicet quae, ob intrinsecam suam difficultatem reapse perfici nequeant ; dummodo nulla lex physica, vel ratio theorica illa impediat.

Ipsa experimenta versari possunt circa obiectum definiendum non solum directe, sed etiam indirecte ; dummodo obiectum quod experimenta directe contrectant necessario nexu nectatur cum ente definiendo.

Iuxta has normas, quos physici universatim admittunt, iam loquendum non est (tamquam de entibus physicis) de orbitis electronum : experimenta enim attingunt (etsi indirecte) distinctos gradus energeticos atomorum, sed deficiunt nexus certi inter hos gradus et definitas orbitas electronum. Analoga ratione iam non fit sermo de significatione physica functionis Ψ.

Defectus vero peculiaris interpretationis physicae functionis Ψ, quae methodo scientifica redacta sit, non detrahit aequationibus Schrödinger et functioni Ψ quamlibet vim ontologicam ; quod magis declarabimus agendo de quaestionibus philosophicis (cfr. Caput III Art. I).

B. Interpretatio Statistica Functionis Ψ.

83. Indoles interpretationis.

Born primus (a. 1929) proposuit interpretationem statisticam functionis Ψ, quae universatim probata est, et quae dein apte inclusa est in schemate illius principii indetermina-

tionis, quod principia novae mechanicae continent, et quod infert descriptionem statisticam phaenomenorum.

Haec nova interpretatio prope accedit ad pristinam theoriam a Schrödinger propositam: seponit quidem peculiarem significationem physicam tributam functioni $|\Psi|^2$, sed servat (et perficit) instrumentum mathematicum, quod Schrödinger elaboravit ad theoretice aestimandas intensitates radiationum. Tale enim instrumentum calculi, iam comprobatum erat aptum ad recte aestimandas intensitates radiationum, et hanc aptitudinem non amittit si separatur a peculiaribus hypothesibus et interpretationibus, quarum auxilio elaboratum erat; iure propterea retinetur.

Transformatur vero significatio sive functionis $|\Psi|^2$ sive coëfficientium ex illa hausti, qui exprimunt varias intensitates radiationum; omnes autem hae functiones acquirunt significationem statisticam, quia iam agitur de descriptione mere collectiva plurimarum evolutionum elementarium, quae variis in modis perficiuntur in distinctis atomis.

Haec interpretatio statistica magis accurate exponenda est (recole nn. 31-33 de legibus statisticis).

In primis, si electrona retinent in compagine atomica naturam punctiformem, functio Ψ, quae evolvitur modo continuo per spatium iam nequit describere statum physicum singulorum electronum. Ipsa functio tamen retineri potest, non iam ad exprimendam densitatem nubis diffusae replentis regionem periphericam atomi, sed ad exprimendam « densitatem probabilitatis » inveniendi electron in variis regionibus periphericis atomi. Hac significatione admissa, electron producit circa nucleum velut nubem electricam (non vero simul ubique diffusam), cuius varia densitas (per intervallum temporis satis productum) congruit cum functione $|\Psi|^2$.

Res magis declaratur si electron fingitur relinquere luminosum vestigium sui; tale vestigium varia intensitate producitur in variis regionibus circa nucleum, pro varia frequentia qua electron transit per illas regiones; haec autem frequentia congruit (per intervallum temporis satis productum) cum definita probabilitate inveniendi electron, seu cum functione $|\Psi|^2$.

Hac ratione $|\Psi|^2$ iam non exprimit « densitatem veram » nubis electricae permanentis, sed « densitatem mediam » cuiusdam peculiaris nubis electricae dynamicae, quam singulum electron producit suo motu. Aliis verbis, varii valores medii, quos talis descriptio definit pro variis regionibus atomi, exprimunt varias fractiones temporis (totalis) per quod electron transit per illas regiones; hae autem fractiones temporis congruunt cum variis densitatibus iam tributis nubi electricae staticae.

Eadem « densitas media » electricitatis colligitur (pro uno eodemque momento temporis) si simul considerantur plurimae atomi eiusdem elementi (in eodem statu physico constitutae): distributio electronum circa earum nucleos producitur iuxta ipsam « densitatem probabilitatis » inveniendi photona, seu iuxta ipsam functionem $|\Psi|^2$; quare tales atomi, simul sumptae, producunt talem distributionem electricitatis, cuius densitas (pro numero N atomorum satis alto) congruit cum functione $|\Psi|^2$. Res magis declaratur si omnes istae atomi finguntur fundi in unam (invariatis manentibus dimensionibus nuclei et zonae periphericae, et excluso quovis mutuo influxu electronum, qui mutet eorum distributionem): colligeretur nubes electronica cuius densitas variaretur iuxta ipsam probabilitatem inveniendi electrona in variis regionibus, seu iuxta ipsam functionem $|\Psi|^2$. Onus totale electricum iam non esset e sed $N \cdot e$; quare densitas, quam definit functio $|\Psi|^2$, exprimeret non iam « densitatem veram » electricitatis in singulis atomis, sed peculiarem « densitatem mediam » quam simul producunt plurimae atomi. Valores autem medii, quos talis descriptio definit pro variis regionibus atomi, exprimunt numeros relativos atomorum, quarum electrona inveniuntur (in eodem momento temporis) in illis ipsis regionibus; hi autem numeri relativi congruunt cum variis densitatibus iam tributis nubi electricae unius atomi.

His interpretationibus statisticis (de « densitate electricitatis » pro statibus stationariis) addendae sunt interpretationes statisticae de fluxu electricitatis, qui producitur quando atomi non perseverant in eodem statu energetico, et producunt irradiationes electromagneticas.

Pristina interpretatio Schrödinger supponebat nubem electricam singularum atomorum inire vibrationes; quare computabatur pro singulis atomis « fluxus verus » electricitatis, qui ponebatur producere campos electricos et magneticos iuxta electromagnetismum classicum, determinando frequentias et intensitates radiationum. Seposita vero illa definita interpretatione physica phaenomeni, retinentur eaedem formulae mathematicae, quae aptae sunt ad recte computandas frequentias et intensitates radiationum; exprimuntur vero, non iam « fluxus veri » electricitatis in singulis atomis, sed « fluxus medii » electricitatis, quos simul producunt plurimae atomi, in quibus distributio statistica electronum sit ad normam functionis $|\Psi|^2$ et eius vibrationum. Tandem his « fluxibus mediis » applicantur eaedem leges electromagnetismi ad computandos campos electricos et magneticos (medios), quos illi fluxus producunt; et colliguntur, tamquam valores statistici, eaedem intensitates radiationum, quas Schrödinger computaverat applicando suas peculiares hypotheses.

Cum valoribus statisticis intensitatum radiationum nectuntur variae probabilitates tribuendae variis internis saltibus energeticis; etenim, iuxta interpretationem quanticam, energia singuli quanti irradiati definita est, et maiores intensitates producuntur quatenus definiti saltus energetici maiori frequentia (seu maiori probabilitate) contingunt; ipsi collective producunt lineas spectrales magis intensas. Theoria a Dirac elaborata has quaestiones bene definit.

84. Analogia inter interpretationem statisticam functionis $|\Psi|^2$ et interpretationem statisticam functionis A^2 opticae undulatoriae.

a. In descriptione compaginis atomicae.

Theoria undulatoria de natura lucis, habuerat energiam radiantem ut diffusam modo continuo per spatium, et consequenter collegerat definitam proportionem inter intensitatem radiationis et potentiam secundam A^2 amplitudinis undae (cfr. n. 24, b). Formulae Fresnel, iuxta has hypotheses elaboratae, reapse congruunt cum intensitatibus radiationum, etiam in minutissimis phaenomenis interferentiae.

Nova hypothesis quantica habet lucem ut constitutam distinctis photonibus; sed haec nova interpretatio non detrahit formulis Fresnel aptitudinem ad recte referendas intensitates illuminationis in phaenomenis opticis. Cum vero intensitas radiationis (ad photona relata) exprimatur varia densitate photonum, functio A^2 induit novam significationem statisticam: indicat « densitatem probabilitatis » inveniendi singula photona, et (si photona plurima sunt) indicat « densitatem veram » (mediam) ipsorum photonum.

Iamvero analogus discursus instauratur ad declarandam significationem statisticam functionis $|\Psi|^2$, ut in praecedenti paragrapho expositum est.

b. In descriptione motuum corpusculorum extra atomum.

Analogia, de qua agimus, perspicue apparet si consideratur motus electronum vel ceterorum corpusculorum extra compaginem atomicam: sicut photonibus associantur undae (« undae phantasmata »), quarum amplitudo definit (modo statistico) distributionem spatialem photonum, ita mechanica undulatoria associat corpusculis functiones undulatorias, quae constituunt instrumentum analyticum, aptum ad definiendos (modo statistico) motus particularum materialium. Hac ratione nominatim describuntur illi aspectus undulatorii, qui competunt etiam motui corpusculorum materialium (cfr. n. 43).

Notandum tamen est discrimen: ut motus corpusculi describatur iuxta methodos mechanicae undulatoriae, non una unda associanda est uni corpusculo, sed fasciculus undarum (cfr. n. 75, b); ut autem velocitas fasciculi aequet velocitatem v corpusculi, velocitas phasis w (undae mediae) servare debet sequentem aequalitatem:

$$v \cdot w = c^2 \qquad [c = \text{velocitas lucis}]$$

quare, velocitates phasium eo magis excedunt velocitatem lucis quo minor est velocitas corpusculi.

Haec conclusio non contradicit praeceptis theoriae relativitatis, quae non admittunt motus velociores luce: theoria

enim relativitatis agit de motibus physicis, aptis ad communicationes statuendas inter puncta dissita ; undae vero associatae corpusculis sunt undae « phantasmata », seu mera instrumenta analytica apta ad perficiendas peculiares computationes. Haec condicio vero, si non obstat theoriae relativitatis, manifestat peculiarem notam novae mechanicae undulatoriae : eius modus describendi phaenomena continet elementa, quae nostra ratione elaborata sunt, et quae propterea tribuenda non sunt obiecto describendo ; in ipso obiecto admittendum tantum est fundamentum huius modi describendi.

c. « Probabilitates » phaenomenorum elementarium solum a posteriori definitae.

Sive « probabilitates » inveniendi singula photona in phaenomenis opticis, sive « probabilitates » inveniendi singula electrona in microphaenomenis mechanicis, nonnisi a posteriori definitae sunt. Illas indicaverunt peculiares formulae mathematicae, quae comprobatae sunt aptae ad describenda phaenomena collectiva (constituta plurimis photonibus vel electronibus) : tanta enim dicenda est « probabilitas » cuiusdam phaenomenis elementaris, quanta est densitas (seu frequentia), qua tale phaenomenon instauratur, et quam recenset descriptio collectiva plurimorum phaenomenorum elementarium.

Neque ipsae « probabilitates » censendae sunt etiam a priori aestimatae, propter considerationes theoreticas, quae duxerunt ad illas formulas mathematicas conscribendas. Procul dubio Fresnel ex ipsis principiis theoriae undulatoriae de natura lucis collegit formulas aptas ad describendas varias gradationes illuminationis in phaenomenis interferentiae ; similiter Schrödinger, innixus peculiaribus hypothesibus physicis, (de nube electrica diffusa), collegit formulas aptas ad definiendas varias intensitates linearum spectralium ; sed tales argumentationes amiserunt suam vim theoreticam cum sepositae sunt peculiares hypotheses physicae, quibus innitebantur.

In his adiunctis, si eaedem formulae mathematicae retentae sunt, hoc eatenus factum est quatenus ipsae formulae (non obstante defectu fundamenti theorici) comprobatae sunt aptae

ad referendas varias intensitates (collectivas) illuminationis vel linearum spectralium. Quare « probabilitates » phaenomenorum elementarium comprobatae sunt tantum a posteriori, ex perpensis phaenomenis, quae producuntur collectione plurimorum phaenomenorum elementarium.

Hae animadvertiones prae oculis habendae erunt ad declarandam significationem philosophicam physicae quantisticae.

85. Principia mechanicae undulatoriae inferunt descriptiones statisticas.

Schrödinger initio posuerat tales hypotheses physicas, quae eum duxerant ad colligendas formulas non statisticas ; pro singulis enim atomis definiebantur : « densitates verae » nubis electricae ; « veri fluxus electrici » pro vibrationibus eiusdem nubis electricae ; et consequentes veri campi electromagnetici irradiati, propter dictos fluxus electricos.

Sed peculiares illae hypotheses sepositae sunt ; quare unumquodque electron, retinens naturam punctiformem in ipsa compagine atomica, pergit describi consuetis parametris cinematicis et dynamicis (ex. gr. : coordinatis spatialibus et impulsibus). Iamvero, peculiaris ratio, qua mechanica undulatoria exprimit haec parametra, impedit quominus simul exprimantur exacti valores sive parametrorum cinematicorum sive parametrorum dynamicorum ; sed stat inter ipsa peculiaris relatio inversa, vi cuius, quo exactius altera parametra definiuntur, eo minus exacte altera recensentur.

Etenim : coordinatae spatiales puncti materialis exhibentur per coordinatas « fasciculi undarum » (cfr. n. 76, 1) ; impulsus vero per longitudinem undarum (cfr. n. 76, 2) ; ad obtinendum vero « fasciculum undarum » fere punctiformem (ita ut eius coordinatae spatiales satis exacte definiantur) colligendae sunt copiosiores undae componentes, quarum longitudines varientur intra intervallum satis amplum (cfr. nn. 26, b ; 74, c) ; consequens est ut talis descriptio associet coordinatis spatialibus satis definitis integram seriem impulsuum, quorum valores variantur intra intervallum, quod eo latius patet quo exactius definitae sunt coordinatae spatiales.

Vicissim, uni impulsui bene definito respondet una definita longitudo undae ; haec vero indefinitas relinquit coordinatas spatiales puncti mobilis, quia non componit ullum fasciculum undarum, delimitatum in spatio.

Talis « relatio inversa » inter coordinatas et impulsus corpusculorum, colligitur ut propositio mathematica, quae exprimit necessarias relationes inter coordinatas spatiales fasciculi undarum et longitudines undae ipsarum undarum ; agitur de propositione mathematica, quae stat sine ulla dependentia a significatione physica tributa fasciculo undarum et longitudini undarum.

Demonstratio huius propositionis colligit etiam eius expressionem quantitativam : si Δq et Δp denotant inexactitudines mensurarum coordinatae q et relativi impulsus p, earum productus $\Delta q \cdot \Delta p$ eiusdem ordinis est ac $h/4\pi$; scilicet :

$$\Delta q \cdot \Delta p \geqq \frac{h}{4\pi}$$

Haec ipsa relatio constituit famosum « principium indeterminationis », quod Heisenberg primus enunciavit, et de quo plura dicemus in sequenti capite.

In ultimo autem capite, considerabimus quaestiones philosophicas, quas exagitaverunt « principium indeterminationis » et consequens necessitas redigendi leges mere statisticas.

Caput II

MECHANICA MATRICIUM

Articulus I.

Generaliora lineamenta theoriae.

86. Criteria fundamentalia.

a. « Definitiones operativae ».

Investigationes de structuris atomicis, quas inter annos 1913-1925, plures indignes physici absolverant adhibendo methodum semiclassicam, procul dubio plurimum contulerant ad progressum scientiae ; sed etiam clare ostenderant exemplaria atomica mechanica non esse idonea ad exprimendas veras proprietates atomorum, et totam redactionem huius capitis scientiae indigere profunda instauratione. Eius enim fundamenta postulaverant principia contradictoria ; aedificium constructum pluries indiguerat emendationibus et aptationibus empiricis, quae neque cohaerebant cum principiis statutis ; manebant lacunae, quae male compensabantur notitiis haustis ex principiis heterogeneis ; deerat tandem plena congruentia cum datis empiricis.

Hisce de causis, eminentes physici serio attenderunt ad radicem huius condicionis, et ad severum examen revocaverunt ipsa principia, quae adhibita erant : disquisitiones de hac re involverunt etiam quaestiones philosophicas de vi nostrae cognitionis.

Heisenberg iure censeri potest primus auctor* huius criticae recognitionis principiorum.

Quoad theoriam quanticam de structura atomorum, quae

*Einstein iam tale opus inchoaverat ; tamen latius et profundius hac occasione positae sunt quaestiones physicae quanticae, quae longe magis quam theoria relativitatis subverterat scientiam physicam.

iam elaborata erat, Heisenberg peropportune notavit eius ineptam redactionem.

Tota theoria respicit ad frequentias radiationum et ad earum intensitates tamquam ad facta physica, quae ultimatim declaranda sunt, et quae etiam constituunt ipsa facta, quae experimentis directe observantur. Ad theorice vero definiendas istas notas, adhibitae erant orbitae, quae observari non poterant, et quae causae erant omnium difficultatum ; iure propterea dubitandum erat de earum significatione physica.

In his adiunctis inepte adhibebantur exemplaria atomica incerta, quae observari non poterant, ut ex iis haurirentur notitiae de factis, quae observari poterant. Quare Heisenberg novam redactionem sibi proposuit totius physicae atomicae, seponendo omnia entia « non observabilia », et statuendo directos nexus inter sola entia « observabilia ».

Talis regula requirit ut non includantur in aequationibus physicis nisi entia quae observari possint vel directe, vel saltem indirecte quatenus nexu certo nectuntur cum iis quae directe observantur. Accedit temperamentum regulae : non requiritur ut observationes reapse perficiantur ; sufficit ut iure mente concipi possint, quia non obstat ulla lex physica vel logica, etiamsi obstent difficultates practicae.

Omnes hae cautiones et condiciones significantur brevi locutione ad hoc instituta : non admittuntur nisi illa entia, quae gaudent « definitione operativa ». Definienda scilicet est, pro quolibet legitimo ente physico, quaedam operatio physica (vel series operationum), qua illud attingere possumus.

Talis condicio copulari potest cum diversis rationibus concipiendi et sententiis.

Condicio definitionis operativae potest in primis postulari ut cautio, quae tunc severe servanda est cum peculiares difficultates praependiunt investigationes, et deest tutum fundamentum ad profundius scrutandas facta experimentalia.

Haec tamen non est mens physicorum, qui iam postulant « definitionem operativam » tamquam condicionem omnino generalem ; tali lege propterea delimitant ambitum scientiae physicae, et eius munus.

Quod si quis postulat « definitionem operativam » non solum intra ambitum scientiae physicae, sed ut condicionem universalem ut quaelibet quaestio significationem acquirat, iam non physicum agit, sed philosophum : nequit enim physicus hanc legem colligere ex mensuris entium physicorum. Immo physicus, qui haec contendat, suam ipsam scientiam eiurat : etenim, etsi obiecta scientiae physicae delimitantur tali norma, nonnulla principia logica (necnon metaphysica) quibus physicus necessario utitur, nequeunt esse obiectum definitionis operativae.

b. «Principium correspondentiae » perficiendum.

Inter praecipua entia physicae atomicae directe « observabilia » recensendae sunt frequentiae et intensitates radiationum, quas atomi emittunt. Haec ipsa entia igitur, iuxta criterium fundamentale Heisenberg, exprimenda sunt sub forma mathematica.

De ipsis entibus iam duae descriptiones mathematicae productae erant : altera classica, altera quantica. Bohr autem sagaciter redegerat principium illud correspondentiae, quo in lucem tulerat analogias inter duas descriptiones et peculiarem congruentiam, qua ipsae descriptiones (altera macroscopica, altera microscopica) in unam funduntur in campo intermedio.

Tale principium, sua ipsa foecunditate, valde se commendaverat, et se exhibuerat ut bene adhaerens naturae rerum. Hoc ipsum principium igitur perficiendum erat : excogitanda scilicet erat nova descriptio mathematica horum entium physicorum, quae suo iure, et non tantum vi cuiusdam analogiae, congruenter referret utrumque campum, microscopicum et macroscopicum.

87. Elaboratio theoriae.

a. Descriptio mathematica entium « observabilium ».

1. Tabulae valorum distinctorum seu « matrices ».

Notae characteristicae radiationum atomorum, quae (directe, vel indirecte) observari possunt, sunt:

— frequentiae radiationum et earum intensitates ; et etiam earum status polarizationis : circa haec elementa versatur analysis spectroscopica ;

— gradus energetici atomorum, qui sunt fontes radiationum : ipsi observantur (indirecte) sive experimentis Franck-Hertz, sive analysi spectroscopica, vi principii combinationis (empirice omnino confirmati) quo variae frequentiae (vel numeri undarum) exprimuntur ut differentiae inter binos terminos spectroscopicos, vel inter binos gradus energeticos (divisos per h) :

$$\nu_{nm} = T_m - T_n \qquad \nu_{nm} = \frac{E_n}{h} - \frac{E_m}{h} \qquad [E_n = -c\,h\,T_n]$$

Omnes hae notae characteristicae nequeunt mathematice repraesentari consuetis functionibus, quarum valores evolvuntur modo continuo ; quia constituunt tot series (infinitas) valorum distinctorum.

Apte illas repraesentant tabulae distinctorum valorum, qui (ad instar productorum in tabula pythagorica) ordinantur per lineas et per columnas. Ad rem nostram quod attinet, huiusmodi lineae et columnae in indefinitum protrahuntur ; quare etiam tabulae infinitae fiunt.

Facile illustrantur huiusmodi tabulae, si consideratur tabella frequentiarum (vel « numerorum undarum »), ad instar tabulae pythagoricae redacta, cui apponantur (iuxta lineas et iuxta columnas) series graduum energeticorum (vel terminorum spectralium), qui sua combinatione definiunt varias frequentias.

	E_1/h	E_2/h	E_3/h	..
E_1/h	0	ν_{21}	ν_{31}	..
E_2/h	ν_{12}	0	ν_{32}	..
E_3/h	ν_{13}	ν_{23}	0	..
...	..	..	..	..

Iuxta lineam diagonalem, frequentiae nullae notatae sunt, quia nullae radiationes respondent statibus energeticis stationariis.

Respectu ipsius lineae diagonalis, variae frequentiae, modo symmetrico, bis notantur. Hae duae series earumdem frequentiarum respondent saltibus energeticis in duos sensus oppositos, prout radiationes emittuntur vel absorbentur.

E_{11}	0	0	..
0	E_{22}	0	..
0	0	E_{33}	..
..	..	..	..

Congruenter, tabula exhibens varios gradus energeticos stationarios, illos ordinat iuxta lineam diagonalem (indices 1, 2, 3 ... bis notantur ad definiendas lineas et columnas).

Tales tabulae denominantur « matrices » ; propter formam symmetricam, quae eis competit respectu lineae diagonalis, constituunt peculiarem typum matricium, quae dicuntur matrices « Hermite ».

Hae matrices aptae sunt ad condendam novam micromechanicam, quae propterea denominatur « mechanica matricium ».

2. « Matrices » et principium correspondentiae.

Ut aliquatenus declaretur aptitudo matricium ad describendam micromechamicam, innuenda est methodus, qua Heisenberg elegit matrices ut expressiones mathematicas entium observabilium, applicando principium correspondentiae.

Physica classica referebat radiationes ad ipsos motus electronum, ad quos describendos adhibebat consueta parametra cinematica et dynamica (ex. gr., coordinatas spatiales et impulsus). Agebatur vero de motibus periodicis ; quare eorum parametra (sive cinematica, sive dynamica) erant functiones periodicae temporis, quae exprimi poterant (auxilio analysis Fourier) per series functionum sinusoidalium (cfr. n. 26, a) ; phases talium functionum periodice variantur iuxta frequen-

tias ν, 2ν, $3\nu \ldots\ldots$, quarum prima est frequentia fundamentalis motus periodici totalis, ceterae vero sunt frequentiae harmonicae superiores, iuxta quas producuntur motus periodici secundarii, qui afficiunt et modificant motum primarium. Singulis functionibus sinusoidalibus competunt coëfficientes A_n, B_n, qui exprimunt varias amplitudines distinctorum motuum componentium (cfr. fig. 11).

Iuxta theoriam classicam, hae ipsae frequentiae et amplitudines describebant etiam frequentias et intensitates (A^2_n) radiationum, quas electrona suo ipso motu supponebantur producere. Hae vero descriptiones modificandae erant, quia radiationes quanticae discrepant a radiationibus classicis; principium autem correspondentiae suggessit criterium ad aptam modificationem perficiendam. Tale principium notaverat plures analogias inter descriptionem classicam et descriptionem quanticam, alteram idoneam pro campo macroscopico et alteram pro campo microscopico. Perficiendum igitur erat hoc ipsum principium, quatenus excogitandum erat novum ens mathematicum, quod suo iure (et non vi merae analogiae) definiret veras frequentias et intensitates pro utroque campo.

Servanda igitur erat analogia inter haec nova entia mathematica et functiones classicas; quare Heisenberg admisit expressiones mathematicas analogas terminis seriei Fourier, quibus physica classica definiverat frequentias et intensitates radiationum. Tales termini (simplicitatis causa*) exhibere possunt per simplicem functionem sinusoidalem ordinariam:

$$q_k = a_k \sin 2\pi k \nu t$$

Considerandum vero erat etiam discrimen inter theoriam classicam et theoriam quanticam; hac de causa novi termini

*Generalior expressio seriei Fourier continet functiones sive sinus sive cosinus. Eaedem functiones trigonometricae, aequipollenti ratione, exprimuntur peculiari functione exponentiali complexa, circa quam operationes mathematicae facilius perficiuntur:

$$q_k = a_k\, e^{2\pi i k \nu t}$$

Quare etiam nova expressio terminorum, ab Heisenberg statuta, proprie scribenda est:

$$q\,(nm) = a(nm)\, e^{2\pi i \nu (nm)\, t}$$

Etiam functiones $a(nm)$ generatim sunt functiones complexae.

tales debebant esse, qui ordinari possent iuxta duplicem seriem infinitam (iuxta structuram propriam matricium) quia frequentiae quanticae se exhibent ut combinationes binorum terminorum. Quare singuli termini inscribendi in matrice sequentis typi sunt:

$$q\,(nm) = a\,(nm) \sin 2\pi \nu\,(nm)\, t$$

et eorum matrix complectitur seriem dupliciter infinitam:

$$\mathbf{q} \left\{ \begin{array}{llll} q\,(00) & q\,(01) & q\,(02) & q\,(03) \ldots\ldots \\ q\,(10) & q\,(11) & q\,(12) & q\,(13) \ldots\ldots \\ q\,(20) & q\,(21) & q\,(22) & q\,(23) \ldots\ldots \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \end{array} \right.$$

Hac ratione, pro functionibus classicis (quibus describebantur coordinatae electronum et earum variationes periodicae) posita sunt nova entia mathematica, quae vices gerunt illarum functionum. Propterea matrix $\mathbf{q}$ dicitur etiam referre coordinatas electronum, et denominatur « matrix coordinatarum ».

Simili ratione constituitur matrix $\mathbf{p}$ momentorum (seu impulsuum), quorum variationes periodicae etiam exprimuntur (iuxta descriptionem classicam) seriebus Fourier.

Similiter repraesentantur ceterae notae et magnitudines atomicae.

b) Operationes circa matrices.

Nova entia mathematica, « matrices » scilicet, adhibita ad exprimenda entia physica atomica et eorum proprietates, adhibenda tandem sunt ad statuendam novam redactionem legum mechanicarum. Leges physicae generatim exprimuntur ipsis relationibus, quibus referuntur ad invicem variae notae physicae, definientes statum vel evolutionem cuiusdam systematis; sed hae relationes involvunt etiam operationes mathematicas, quae perficiendae sunt circa expressiones mathematicas entium physicorum; quare problema de redigenda nova mechanica postulabat praeviam definitionem variarum operationum circa matrices.

Cum matrices complectantur series (infinitas) elementorum, etiam operationes circa matrices constituuntur seriebus (infinitis) operationum circa earum elementa.

Ex. gr. summa duarum matricium $\mathbf{q}'$ et $\mathbf{q}''$ est nova matrix $\mathbf{q}$, cuius elementum $q\,(nm)$ est summa homologorum elementorum duarum matricium addendarum :

$$q\,(nm) = q'\,(nm) + q''\,(nm)$$

Non obvia est definitio producti duarum matricium, quam Heisenberg collegit (applicando principium correspondentiae) ex perpensis productis duarum serierum Fourier, et postulando analogas proprietates.

Definitio multiplicationis ostendit hanc operationem non gaudere generatim proprietate commutativa, sed dari posse inaequalitatem :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \neq \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$$

Hac autem proprietate (ut mox indicabimus) Heisenberg usus est ad inserendam condicionem quanticam in nova redactione micromechanicae.

Omnes variae operationes circa matrices constituunt algebram matricium, quae ceteroquin a mathematicis iam exculta erat : iamdiu enim analysis mathematica adhibuerat matrices.

c. Nova redactio legum mechanicarum.

Definitis operationibus circa matrices, omnia elementa praesto sunt ad conscribendas leges novae mechanicae. Ad hunc finem Heisenberg coniecit (hypothesis vero comprobanda erat a posteriori) coniecit inter matrices $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ (quae vices gerunt coordinatarum et momentorum mechanicae classicae) stare easdem relationes analyticas, quas mechanica classica ponit inter coordinatas et momenta corpusculorum.

Agitur de illis generalioribus relationibus (expressis aequationibus differentialibus - cfr. n. 54, a, b, et nominatim aequationes differentiales sub forma aequationum canonicarum Hamilton), quibus obtemperant motus systematum mechanicorum. Hae aequationes exprimunt duplicem symmetriam ; scilicet : ita variatur energia systematis respectu variationis momentorum, sicut variantur coordinatae respectu temporis ; et analoga ratione, ita variatur energia systematis respectu variationis coordinatarum, sicut variantur momenta respectu temporis. Huiusmodi relationes, adhibitis consuetis symbolis, scribuntur :

$$\text{(H)} \qquad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}$$

H denotat matricem Hamiltonianam, cuius structura analytica analoga est structurae functionis Hamiltonianae H mechanicae classicae, quae definit energiam totalem systematis, adhibendo coordinatas q et momenta p ipsius systematis.

Aequationes (H), quae ad matrices referuntur, indicant integram seriem aequationum eiusdem typi, quae componendae sunt elementis homologis matricium. Aequationes huius typi etiam instaurandae sunt pro numero parametrorum q_i, p_i systematis, quibus respondent plures matrices $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{p}_i$.

d. Insertio condicionis quanticae.

Inserenda tandem erat condicio quantica, vi cuius actiones systematum nequeunt variari modo continuo, sed per saltus, multiplos actionis elementaris h.

Ad talem condicionem apte inserendam, Heisenberg denuo adhibuit principium correspondentiae. Talis scilicet redactio legum colligenda erat, quae paulatim congrueret cum legibus classicis quo magis systemata excederent fines microscopicos ; tunc singuli saltus quantici adeo parvi fiunt ut negligi possint ; et speciem exhibent variationis continuae. Idem criterium aequipollenti ratione applicatur, postulando congruentiam novarum legum cum legibus classicis si quantum elementare actionis h ponitur evanescere et fieri nullum.

Hoc criterio posito, ipsa structura matricium et earum proprietates sponte indicant rectam insertionem condicionis quanticae. Etenim, si pro frequentiis $\nu\,(nm)$ (quae includuntur in elementis matricium) ponitur earum expressio quantica $\Delta E\,(nm)/h$, haec consequuntur : producti, qui non gaudent

proprietate invariantiva, illi sunt qui componunt quamdam « actionem » (ut producti coordinatarum $\mathbf{q}$ per momenta $\mathbf{p}$); sub aspectu quantitativo autem colligitur sequens aequalitas.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \frac{h}{2\pi i}$$

Iamvero, si ponitur in hac aequalitate $h = 0$, postulando proprietatem commutativam etiam pro talibus productis, colliguntur aequationes dynamicae classicae; quare ipsa aequalitas (pro $h \neq 0$) exprimit condicionem quanticam.

88. Comprobationes theoriae.

a. Indoles comprobationis.

Methodus, qua theoria elaborata est, ostendit ipsam vere collectam esse (prout Heisenberg sibi proposuerat) ex connubio duorum criteriorum fundamentalium : admittenda tantum erant entia physica observabilia, et applicandum et perficiendum erat principium correspondentiae.

Talis vero constructio theoriae, quamvis mira et bene fundata, tamen non poterat a priori probari ut certa : ipsa criteria fundamentalia, pro sua indole, non gaudent tanta vi probativa ; insuper, ad ipsa criteria applicanda superadditae etiam sunt nonnullae hypotheses. Quare comprobatio theoriae nonnisi a posteriori haberi poterat, ex eius aptitudine ad reapse describenda microphaenomena mechanica.

Talis autem comprobatio non defuit : non minus quam aequationes mechanicae undulatoriae, etiam aequationes novae micromechanicae suppeditant solutiones, quae congruenter describunt phaenomena.

Elementa physica quae definiuntur sunt : gradus energetici atomorum ; numeri quantici, definientes ipsos gradus energeticos ; frequentiae radiationum, necnon earum intensitates et status polarizationis ; regulae selectivae, seu condiciones, quibus obtemperare debent variationes numerorum quanticorum ut colligantur intensitates non nullae.

b. Aequipollentia mechanicae undulatoriae et mechanicae matricium.

Non obstante specie prima fronte diversissima duarum theoriarum, ipsae aequipollentes sunt sub aspectu mathematico. Schrödinger hanc rem demonstravit : etsi sub diversa forma, perficiuntur eaedem operationes circa easdem functiones.

Quare duae novae mechanicae iam habentur ut duae partes integrantes modernae physicae quantisticae : altera alteri utile subsidium praestat, ita ut separari iam nequeant. Unum idemque problema resolvi potest partim methodis mechanicae undulatoriae, partim methodis mechanicae matricium. Ex. gr. ex aequationibus Schrödinger colliguntur autovalores E_n et consequenter functiones fundamentales Ψ_n; ex his functionibus hauriuntur elementa matricium Heisenberg, quibus definiuntur intensitates et status polarizationis radiationum.

c. Indoles statistica novae mechanicae.

Non minus quam mechanica undulatoria, etiam aequipollens mechanica matricium describit phaenomena methodo statistica. Quod iam conici poterat ex ipsis principiis theoriae. Descriptiones enim phaenomenorum ita ponuntur ut simul considerentur omnes casus possibiles (omnes frequentiae emissae, et earum variae intensitates) ; agitur propterea de descriptionibus collectivis, quae tamen, ad singula phaenomena elementaria quod attinet, implicite definiunt earum varias probabilitates. Aequationes etiam ex intentione ita elaboratae sunt ut rite exprimerent has probabilitates.

Non omnia vero elementa physica exhibentur ut valores medii ; etenim, gradus energetici possibiles, eorum numeri quantici, frequentiae radiationum, regulae selectivae exprimunt valores et condiciones spectantes singulas atomos. Non definiuntur vero pro singulis atomis saltus energetici qui reapse producuntur ; definiuntur nihilominus variae probabilitates pro variis saltibus energetici $\Delta E\,(nm)$; et his variis probabilitatibus respondent variae intensitates frequentiarum $\nu\,(nm)$.

Lex statistica definiens has probabilitates analoga est legi statisticae de distributione photonum (expressa nota functione

A^2), et congruit cum interpretatione statistica mechanicae undulatoriae (cfr. nn. 81, c, 4; 83; 84). Novae enim expressiones probabilitatum hauriuntur ex elementis matricis $\mathfrak{q}$, quae conformata sunt ad functiones sinusoidales seriei Fourier (cfr. n. 88, a). Iamvero coëfficientes $a\,(nm)$ (in novis expressionibus inclusi), si referuntur ad formulas classicas ex quibus hausti sunt, indicant amplitudinem peculiaris vibrationis electronum, quae perficitur frequentia $\nu\,(nm)$; potentia autem secunda huius amplitudinis nectitur (iuxta ipsam interpretationem classicam) cum intensitate radiationis emissae ab unaquaque atomo. Nunc vero seponitur interpretatio classica radiationum et earum intensitatum; iure tamen retinentur functiones $|a\,(nm)|^2$, quae comprobatae sunt reapse congruere cum intensitate radiationum pro frequentia $\nu\,(nm)$. Hae autem intensitates (iuxta interpretationem quanticam) referendae iam non sunt ad peculiares internas evolutiones singularum atomorum, sed ad varias frequentias quibus contingunt varii saltus energetici; quare functiones $|a\,(nm)|^2$ referentes has ipsas frequentias, etiam referunt varias probabilitates tribuendas variis saltibus energeticis.

Articulus II.

Principium Indeterminationis

89. Indoles Principii.

« Principium indeterminationis », quod aptius denominaretur « principium inexactitudinis », enunciat impossibilitatem definiendi, modo exacto et pro uno eodemque momento temporis, omnia parametra, sive cinematica sive dynamica, quibus describuntur status physici systematum mechanicorum et eorum evolutiones; sed quo exactius definitur altera series parametrorum, minus exacte definitur series coniugata.

Consequens est ut varii status physici possibiles et evolutiones systematum describendi sint methodis statisticis; haec autem condicio essentialis est pro physica quantica, quia

principium indeterminationis involvitur in ipsis eius generalioribus principiis.

Indoles huius principii perspicue declaratur si comparatur cum opposito principio « determinismi », quod permeaverat physicam classicam.

Physici, sine ulla dubitatione et controversia, iam admiserant possibilitatem plene describendi statum physicum definiti systematis pro definito momento temporis: omnes necessariae mensurae censebantur colligi posse, et etiam accuratioribus methodis sine limitatione perfici posse. Accedebant leges plene determinatae circa evolutionem singulorum systematum: posita exacta notitia sive de statu initiali systematis sive de viribus (ex. gr. gravitationalibus) agentibus in ipsum systema inter eius evolutionem, plene determinabatur tota subsequens evolutio eiusdem definiti systematis. Structura analytica aequationum physicarum, suis ipsis nexibus determinatis et determinantibus, exprimit et declarat talem determinismum.

Hic ipse « determinismus » consuevit etiam designari nomine « causalitatis » (quamvis inepte, quia dantur causae non obtemperantes ullo determinismo). Status initiales systematum habiti sunt ut « causae » (determinantes) subsequentium evolutionum; propterea ipsae evolutiones dictae sunt obtemperare « principio causalitatis ».

Idem determinismus solet etiam exprimi per consequentem « possibilitatem praedicendi » totam evolutionem definiti systematis, si cognoscuntur eius status initialis et vires quae in ipsum systema agunt. Etiam haec « possibilitas praedicendi » solet exhiberi ut unum idemque ac « principium causalitatis ».

Omnia haec principia et criteria iam visa erant satis comprobata argumentis physicis, propter egregiam congruentiam descriptionum physicae classicae cum veris evolutionibus phaenomenorum. Quare « determinismus mundi physici » iam recensitus erat inter conclusiones scientifice compertas. Argumenta physica « pro determinismo » directe non respiciebant nisi mundum macroscopicum; sed conclusiones applicatae etiam erant mundo microscopico, quem ipsi physici coniecerant describi posse iisdem methodis.

Nova inventa physicae quantisticae subverterunt totam hanc constructionem theoreticam : in primis irrita comprobata sunt omnia tentamina describendi modo determinato evolutionem singulorum systematum microscopicorum ; accessit « principium indeterminationis » quod, argumentis physicis et theoreticis, negabat ipsam possibilitatem talium descriptionum.

Variis modis novae conclusiones affirmatae sunt ; ex. gr. :

— Mundus physicus microscopicus non obtemperat determinismo ; non ligatur legibus determinatis ; regitur vero meris probabilitatibus, seu legibus mere statisticis.

— Principium causalitatis non applicatur intra fines microscopicos ; vel saltem non applicatur pari rigore. Ipsum principium dictum etiam est nullatenus componi posse cum physica quantistica, necnon carere significatione physica.

Tales conclusiones et assertiones excitaverunt etiam quaestiones et controversias philosophicas. De his agemus in capite sequenti ; interim consideranda est significatio et vis scientifica principii indeterminationis.

90. Prima enunciatio principii indeterminationis sub aspectu physico-experimentali.

Heisenberg primus enunciavit principium indeterminationis ; et illud exhibuit sub peculiari forma, omnino consona cum regula de definitione operativa ; scilicet :

Concipi nequeunt operationes experimentales, vel mere ideales, quae valeant ad comparandas exactas mensuras (pro uno eodemque momento temporis) omnium parametrorum definientium statum physicum systematum, et nominatim parametrum sive cinematicorum sive dynamicorum.

Heisenberg collegit hoc principium methodo quasi empirica, considerando plures casus peculiares, et dein enunciando propositionem generalem.

Impossibilitas, quam principium enunciat, proxime revocanda est ad perturbationem, quam ipsa operatio observatoris necessario infert obiecto mensurando, et ad absolutum defectum experimenti, quod, una operatione, simul comparet omnes mensuras necessarias.

Exempli gratia, mensurae de coordinatis corpusculi (in determinato momento t) possunt quidem sine limitatione perfici et magis ac magis exacte colligi, sed nulla operatio ad hunc finem perfici potest si ipsum corpusculum non illuminatur radiationibus ; hae autem, suo impulsu, necessario mutant impulsum corpusculi, ita ut iam nequeat exacte definiri impulsus corpusculi pro eodem momento t.

Heisenberg aestimavit consectaria harum perturbationum, et definivit principium indeterminationis etiam sub aspectu quantitativo ; collegit scilicet notas relationes (quas iam exposuimus - cfr. n. 85) inter inexactitudines mensurarum circa parametra cinematica et parametra dynamica :

$$\text{(i)} \qquad \Delta q \cdot \Delta p \geqq \frac{h}{4\pi} \; ; \qquad \Delta t \cdot \Delta E \geqq \frac{h}{4\pi}$$

Hae relationes mutuo se inferunt : si non simul starent, simul deficerent. Hac ipsa de causa, applicandae sunt sive corpusculis sive photonibus.

Relationes incertitudinis (i) ostendunt nexum inter inexactitudines mensurarum et quantum actionis h : si h evanesceret et tandem nullum fieret, iam non repugnarent operationes aptae ad colligendas exactas mensuras omnium parametrorum. Hac ipsa de causa, principium inexactitudinis practice negligendum est quoties agitur de ordine non microscopico : adeo enim parvum est quantum actionis h, ut practice haberi possit ut nullum respectu cuiuslibet mensurae non miscoscopicae.

Notandum.

Haec enunciatio principii indeterminationis, sub aspectu physico-experimentali, non valet ad ostendendam totam vim principii, et nominatim ad probandam necessitatem legum mere statisticarum.

Non enim quaevis perturbatio, quam producere possunt operationes ad mensuras colligendas, sufficit ad absolute excludendas mensuras exactas : si ipsae perturbationes aestimari possent, mensurae exactae reintegrarentur. Quare, ad statuen-

dum tale principium indeterminationis, quod necessario inferat leges mere statisticas, requiruntur peculiares perturbationes « quae determinari nequeant » sive aliis mensuris, sive hypothesibus indirecte confirmandis ex consectariis. Sed talis condicio iam supponit principium indeterminationis et illud non probat.

91. Principium indeterminationis ut theorema mathematicum.

Principium indeterminationis involvitur in ipsis positionibus fundamentalibus, quibus mechanica undulatoria et mechanica matricium statuunt proprias rationes describendi phaenomena. Hae positiones scilicet secumferunt impossibilitatem exprimendi exactas mensuras simultaneas omnium parametrorum quibus describuntur status physici et evolutiones systematum elementarium ; sed necessario stat nota relatio inexactitudinis inter parametra cinematica et dynamica. Argumentatio, quae colligit hanc conclusionem ex illis positionibus fundamentalibus, perficitur methodo mathematica, et valet etiam ad definiendum principium indeterminationis sub aspectu quantitativo, expresso relationibus (i).

Indoles argumentationis iam declarata est cum notatus est character statisticus mechanicae undulatoriae (cfr. n. 85) ; cum autem mechanica undulatoria et mechanica matricium aequipollentes sint sub aspectu mathematico, opus non est ut eadem res denuo declaretur argumentis desumptis ex mechanica matricium.

Notandum.

Demonstratio principii indeterminationis, hausta ex ipsis principiis mechanicae quantisticae, censenda non est velut independens a peculiaribus interpretationibus tributis formulis fundamentalibus huius mechanicae.

Aequationes mechanicae undulatoriae perspicue declarant hanc animadversionem. Cum Schrödinger tribuerat functioni $|\Psi|^2$ significationem physicam cuiusdam « verae densitatis » nubis electricae in singulis atomis, eius aequationes (non minus quam classicae aequationes undarum) plene determinabant totam evolutionem (per tempus et per spatium) singulorum systematum elementarium. Cum vero talis interpretatio physica functionis Ψ retineri non potuerit, alia relatio statuta est a Born inter elementa mathematica aequationum et elementa physica describenda ; iamvero haec nova interpretatio aequationum (quae exprimitur duabus hypothesibus, altera circa functiones Ψ_n, altera circa coëfficientes c_n - cfr. n. 84, a, c), implicite secum ferebat principium indeterminationis. Demonstratio igitur huius principii in lucem fert propositionem iam implicite positam.

9. Significatio et vis principii indeterminationis.

a. Character essentialiter statisticus mechanicae quantisticae.

1. Ut in praecedenti paragrapho declaratum est, rationes describendi phaenomena, quas mechanicae quantisticae posuerunt, involvunt principium indeterminationis ; hoc autem principium necessario infert descriptiones statisticas ; quare descriptiones propriae mechanicae quantisticae necessario exhibent characterem statisticum.

2. Eadem res potest exprimi aequipollenti locutione, quae valde adhibita est, et circa quam etiam disputationes et controversiae excitatae sunt : nequeunt scilicet dari « parametra latentia », apta ad auferendam indeterminationem mechanicae quantisticae, et ad conferendam formam determinatam eius descriptionibus. Talis hypothesis manifesto repugnat indoli essentialiter statisticae harum descriptionum.

Controversiae de hac re factae sunt quia qui tenent determinismum mundi physici necessario cogitant de parametris, quae nos adhuc latent, sed quae reapse determinant evolutionem singulorum systematum elementarium. Haec affirmatio nullam internam contradictionem continet ; contradictoria vero postularet qui coniceret « parametra latentia », quae, si patefierent et inscriberentur in ipsis descriptionibus mechanicae quantisticae, illas perficerent et ad formam determinatam deducerent : nequit enim eadem descriptio simul esse statistica et non statistica.

3. Cum quaestione nuper exposita (an dentur parametra latentia apta ad determinandas descriptiones phaenomenorum) arcte nectitur alia quaestio : an necessitas adhibendi descriptiones statisticas originem ducat ex nostra nescientia de causis (seu de parametris) quae reapse determinant evolutionem phaenomenorum, an potius ex nostra scientia de microphaenomenis.

Haec altera origo saepe affirmata et notata est ad ostendendum discrimen inter characterem statisticum mechanicae quantisticae et characterem statisticum, ex. gr., theoriae cineticae classicae, quae, quamvis necessario adhiberet descriptiones mere statisticas, propter practicam impossibilitatem cognoscendi et perpendendi omnia minutissima et innumera adiuncta, tamen concipiebat descriptionem determinatam ut theoretice possibilem, et definita significatione physica non destitutam.

Plures propositiones de hac re affirmari possunt, quae unicuique sententiae agnoscunt quamdam partem veritatis.

— In causa certe non est nostra ignorantia de « parametris latentibus », quae valeant ad conferendam formam determinatam ipsis descriptionibus mechanicae quantisticae ; quia talia parametra non dantur.

— In causa vero est nostra positiva scientia de microphaenomenis ; notitiae enim, quas de illis habemus, non siverunt aliam aptam descriptionem praeter descriptiones quantisticas, essentialiter statisticas.

Sub his duobus aspectibus, revera indoles statistica mechanicae quantisticae differt ab indole statistica theoriae cineticae classicae.*

Tamen, ipsum principium indeterminationis (ut statim declarabimus) non exhibet ut absolute impossibiles alias descriptiones determinatas de microcosmo, aliis methodis perficiendas ; quod si tales methodi dari possunt, necessitas hodierna adhibendi descriptiones mere statisticas referenda etiam est ad nostram nescientiam.

*Etiam theoria cinetica aëriformium perficienda est iuxta theorias quantisticas, quia etiam motui corpusculorum competit aspectus undulatorius, qui solis methodis statisticis perpenditur; tamen, si descriptio sistit in primo gradu approximationis, hae minutissimae emendationes considerandae non sunt, et quae notata sunt significationem non amittunt.

b. Principium indeterminationis et possibilitas descriptionum determinatarum.

Principium indeterminationis (quod infert descriptiones mere statisticas) necessario sequitur illas rationes describendi phaenomena, quas mechanicae quantisticae statuerunt. Quamvis aliae aptae descriptiones microcosmi productae non sint, tamen neque demonstratum est descriptiones mechanicae quantisticae esse solas quae dari possunt. Quare sive methodi quantisticae, sive earum successus, sive principium indeterminationis quod ipsae methodi involvunt, nequeunt exhiberi tamquam argumentum, quod logice excludat possibilitatem aliarum descriptionum determinatarum.

Quod eo magis asserendum est quia considerationes theoricae, quarum auxilio sive Schrödinger sive Heisenberg novum aedificium construxerunt, non erant tales, quae argumentis rationalibus comprobarentur necessariae ; quare novae theoriae nonnisi a posteriori comprobatae sunt, propter suam aptitudinem ad describenda phaenomena. Sed haec aptitudo, mere empirice comprobata, nequit logice excludere quaslibet alias descriptiones.

Omnes physici consentiunt quoad hanc conclusionem logicam ; diversae vero sunt eorum propensiones. Non desunt qui autumant reditum ad redactionem determinatam legum physicarum, et suam operam ad hunc finem impendunt : eminet, ad hunc propositum, L. De Broglie. Generatim vero physici non attendunt ad has incertas possibilitates ; vel potius illas practice excludunt ; et ita agunt sive quia eis desunt argumenta empirica pro descriptionibus determinatis (vel « causalibus », ut aiunt) ; sive quia notant aptitudinem functionis Ψ ad exprimendas relationes inter omnia parametra « hucusque nota », designantia varios status physicos et evolutiones systematum ; coniciunt propterea ipsam functionem Ψ esse aptam ad exprimendas relationes inter « universa » parametra quae

dari possunt ; hae vero relationes involvunt principium indeterminationis, et excludunt parametra determinantia.

Haec communis mens physicorum solet etiam referri ad famosum theorema, quo von Neumann demonstravit dari non posse « parametra latentia », quibus evolutiones systematum elementarium definiantur nexibus determinatis.

De significatione et vi huius theorematis non parum disputatum est. Eius demonstratio admittit, tamquam condicionem praeviam, universalem aptitudinem mechanicae quantisticae ad describendos universos status physicos et omnes eorum evolutiones. Iamvero, si haec hypothesis postulanda est, propositio quae vere demonstratur ea sola est, quam pluries notavimus ; scilicet : dari nequeunt parametra, quae phaenomena describant modo determinato, simul applicando methodos proprias mechanicae quantisticae.

Ut absolute vero excludantur quaelibet descriptiones determinatae, non sufficit hypothesis de aptitudine functionis Ψ ad describenda universa phaenomena ; etiam requiritur ut eius descriptiones sint adaequatae et referant ipsa lineamenta propria phaenomenorum ; ita ut nulla proprietas et nullus aspectus dentur in re, qui non exprimantur formulis, et, vicissim, nullus aspectus competat formulis, qui non pertineat ipsi obiecto descripto. Solum enim in his adiunctis nequeunt poni in re illa parametra, quae nequeunt inscribi in formulis ; vel (quod ad idem redit) nequeunt dari in formulis modi describendi (indeterminati) qui etiam non sint proprietates rerum.

c. Elementa physica determinata et elementa solum statistice recensita.

Indoles essentialiter statistica novae mechanicae non ita intelligenda est perinde ac si de omnibus entibus et proprietatibus non exhibeantur nisi valores medii, desumpti ex mensuris collectivis circa grandem numerum phaenomenorum elementarium. Plura enim plene determinantur ; immo praestant elementa determinata, quae sunt :

1. Quantum actionis h : agitur autem de nota dynamica,

quae evolvitur per spatium et per tempus, et non de quadam quantitate statica.

2. Distincti gradus energetici variorum elementorum : agitur de definitis valoribus, qui competunt singulis atomis, et non de valoribus mediis.

3. Numeri quantici, definientes quamdam internam structuram systematum, et eorum gradus energeticos : agitur de definitis numeris, qui referendi sunt singulis electronibus in singulis atomis.

4. Frequentiae radiationum, quarum valores pendent ex definitis saltibus energeticis, iuxta definitam relationem : $\nu = \Delta E/h$.

5. Regulae (iam recensitae tamquam « regulae selectivae ») iuxta quas variari possunt, in singulis saltibus energeticis, numeri quantici l, m, j.

6. Principium Pauli, iuxta quod nequeunt dari, in una eademque compagine atomica, duo electrona iisdem quaternis numeris quanticis affecta ; ad normam huius principii construuntur variae compagines electronicae (in singulis atomis) totius systematis periodici elementorum.

7. Invariantia adiabatica systematum exprimit determinatas evolutiones singulorum systematum elementarium.

8. Spectra optica (spectra arcus ; spectra scintillae : primi secundi, tertii . . . ordinis) definitis legibus nexa cum electronibus periphericis.

9. Proprietates magneticae atomorum, quibus competunt (in singulis atomis) distinctae et definitae directiones (iuxta quantificationem spatialem quam comprobarunt experimenta Stern-Gerlach).

10. Definitae valentiae (et consequentes proprietates chimicae) singularum atomorum ; quae referendae sunt electronibus periphericis (prout in lucem tulerunt definitae compagines electronicae omnium elementorum systematis periodici, ad normam principii Pauli constitutae).

11. Relatio inexactitudinis $\Delta q \cdot \Delta p \sim h$, quamvis intime nexa cum indole statistica descriptionum, tamen etiam deli-

mitat ordinem inexactitudinis (quae eiusdem ordinis est ac quantum actionis h).

12. Definitus ordo macroscopicus (et censetur « macroscopicum » quod adhuc valde « microscopicum » est in sensu communi) validioribus argumentis confirmatus est. Etenim, sive Schrödinger sive Heisenberg, ut construerent novam micromechanicam, applicaverunt principium correspondentiae : postulaverunt scilicet tales leges microcosmi, quae congruerent cum comprobato ordine macroscopico, cum systemata evolverentur inter status definitos altioribus numeris quanticis. Successus duarum theoriarum comprobant leges de microcosmo (etsi sub forma statistica) recte definitas esse ; quare valde et minutissime illustrata est structura microscopica mundi physici.

Elementa exhibita methodo statistica (tamquam valores medii, vel tamquam « probabilitates » si descriptio refertur ad singula phaenomena elementaria) sunt :

1. Intensitates radiationum : iuxta interpretationem quanticam radiationum, radiationes intensiores referendae sunt saltibus energeticis frequentioribus, seu probabilioribus.

Sive mechanica undulatoria, sive mechanica matricium exprimunt has probabilitates quibusdam coëfficientibus, quorum origo ponenda est in quadam formula classica, quae typi determinati erat. Haec formula vero (sicut formula undulatoria adhibita ad exprimendas densitatem photonum) exhuit suam pristinam significationem (classicam), et eatenus retenta est ad significandas dictas probabilitates quatenus empirice comprobata est congruere cum variis intensitatibus radiationum, quas collective componunt plurimi saltus energetici determinati typi.

2. Status polarizationis radiationum : qui revocantur ad intensitates variarum radiationum componentium.

3. Probabilitates diversorum statuum energeticorum : nexae cum saltibus energeticis magis vel minus probabilibus, et propterea cum intensitatibus radiationum, quae solum statistice definiuntur.

Caput III

QUAESTIONES PHILOSOPHICAE CUM PHYSICA QUANTISTICA CONIUNCTAE

Articulus I.

Physica quantistica et realismus moderatus.

93 Causa tractationis.

Physica quantistica facile exhibetur tamquam caput scientiae, quod, ad severiorem logicam conformatum, sistit in sola externa descriptione phaenomenorum : optime (aiunt) describit quae experimentis conspicimus, sed non revelat internam structuram rerum et phaenomenorum.

Neque desunt philosophi, qui, neopositivismum profitentes, inserunt suas sententias philosophicas huic tractatui physicae modernae.

Generatim physici, etiamsi non sint veri positivistae qui stent pro subiectivismo nostrarum cognitionum, tamen omnino alieni sunt a quavis investigatione, quae praetergrediatur fines physicae experimentalis ; nonnullae causae huius habitus mentis recenseri possunt : redactio formalis mechanicae quantisticae (quae sola congruit cum microstructura phaenomenorum) ; defectus interpretationis physicae functionis Ψ ; consueta methodus investigationis physicorum ad normam « definitionis operativae », propter quam censentur ut significatione destituta quae tali condicioni non obtemperant ; accesserunt critica examina de determinismo mundi physici, qui exhibetur ut admissus (sine vera comprobatione scientifica) ob mera praeiudicia metaphysica ; tandem idem determinismus denominatur etiam « principium causalitatis », et (occasione eiusdem nominis) confusio non raro fit cum metaphysico « principio causa-

litatis »; quare hoc ipsum principium (necnon tota metaphysica) censetur carere vi scientifica.

Non parvi momenti est has quaestiones declarare, et perniciosas aequivocationes tollere. Si autem attente res consideratur, apparet non solum nullam dari repugnantiam inter physicam quantisticam et realismum philosophicum (moderatum), sed etiam hanc sententiam solam esse, quae vere congruit cum elementis scientificis physicae quantisticae.

Ad hunc propositum obvie instaurari possunt eaedem argumentationes, quae iam institutae sunt quoad ontologicam synthesim corpuscularem-undulatoriam de natura lucis (cfr. nn. 38; 39). Animadversiones, quas tunc iam exposuimus, repetendae non sunt; utiliter vero adduntur nonnullae animadversiones desumptae ex notionibus propriis mechanicae quantisticae.

94. Realismus moderatus optime copulatur cum mechanica quantistica.

a. Plures notiones certe acquisitae de structura atomorum supponunt rationem propriam concipiendi realismi philosophici.

1. Plures notitiae non dubiae de interna structura atomorum acquisitae iam sunt opera theoriae quanticae semiclassicae.

Hae notitiae, quae iam satis recensitae sunt (cfr. n. 72) respiciunt: internos gradus energeticos atomorum, per saltus distinctos; numeros quanticos, definientes gradus energeticos; nexum inter frequentias radiationum et internos saltus energeticos, qui sunt fontes causales ipsarum radiationum; proprietates magneticas, nexas cum ipsis numeris quanticis; unitatem atomorum ad normam principii Pauli; internam evolutionem energeticam atomorum, obtemperantem certis regulis.

Omnes hae notiones supponunt rationem concipiendi realismi philosophici; non enim absolvuntur sola descriptione externa factorum empiricorum, sed etiam alia facta attingunt, vi cognitionis intellectualis, quae profundius penetrans ipsa facta empirica, etiam perspicit eorum necessarios nexus cum aliis distinctis factis, quae rationem sufficientem reddant de iis quae directe experimenta manifestant.

Obvia autem est distinctio inter facta ultimo affirmata et facta immediate percepta: haec enim sunt lineae spectrales, quas analysis spectroscopica recenset; vel variationes (per saltus) quas patiuntur instrumenta mensurae in experimentis Franck-Hertz; vel vestigia separata atomorum, qualia colliguntur in experimentis Stern-Gerlach circa proprietates magneticas atomorum. Alia vero sunt facta, de quibus agunt conclusiones scientificae supra recensitae.

2. Recentiores theoriae quantisticae has notitias confirmant et perficiunt.

Ipsi enim valores, quos methodi experimentales iam bene definiverant, exacte collecti sunt ex principiis mechanicae quantisticae, quae neque hybrida sunt, neque indiguerunt emendationibus et aptationibus empiricis. Clarius propterea innotuit definitio theoretica horum elementorum, ad eorum valorem quod attinet.

Mechanica quantistica praesertim complevit lacunam theoriae semiclassicae, colligendo ex suis ipsis principiis notitias circa intensitates radiationum, et status polarizationis. Hae notitiae nonnisi a posteriori comprobatae sunt ex perpensis effectibus collectivis, simul productis a plurimis atomis; sed lineamentis propriis horum effectuum, procul dubio respondent peculiares internae proprietates atomorum, quae moderantur earum internas evolutiones energeticas iuxta peculiares leges.

Neque haec conclusio suam vim amittit quia agitur de legibus statisticis: non enim leges statisticae definiuntur abstractis computationibus mathematicis circa varias combinationes possibiles phaenomenorum elementarium; sed postulant fundamentum sui in internis proprietatibus rerum; secus neque ulla ratio exstaret cur varia phaenomena evolvantur iuxta diversas leges statisticas (cfr. nn. 32, d; 33, d).

Ad rem nostram quod attinet, leges statisticae (de distributione sive electronum sive photonum) exprimuntur formulis typi undulatorii; cum autem in ipsa natura rerum stet fundamentum physicum talium legum, etiam huic fundamento iure tribuuntur (quamvis conceptu mere analogico) quaedam lineamenta typi undulatorii.

3. Totam hanc quaestionem perspicue illustrat pristina interpretatio physica, quam Schrödinger proposuerat de functione Ψ: supposuerat electrona fieri (intra atomos) nubes electricas diffusas, et has nubes suis vibrationibus causare irradiationes electromagneticas.

Haec interpretatio non erat statistica, sed modo determinato definiebat internas structuras et internas evolutiones energeticas singularum atomorum. Haec ipsa interpretatio vero retineri non potuit ; retentae vero sunt formulae mathematicae ex illa hypothesi collectae, quia comprobatae erant aptae ad describenda phaenomena collectiva, quoad intensitates radiationum. Exhuerunt propterea hae formulae suam pristinam et determinatam significationem physicam, et induerunt significationem statisticam. Nequit nihilominus non dari in re fundamentum physicum huius legis statisticae ; quod fundamentum si non ad amussim congruit cum proprietatibus primo a Schrödinger suppositis, illis ipsis proprietatibus per similitudinem illustratur : aequipollens enim est, quia eosdem effectus collectivos producit.

b) Realismus nostrarum cognitionum non est nisi moderatus.

Notitiae acquisitae de interna structura atomorum, quantumvis mirae, imperfectae sunt : non patefaciunt totam naturam atomorum, et earum proprietatum ; nonnulla non exhibentur suis lineamentis propriis , sed declarantur per analogias.

Etenim :

1. De internis gradibus energeticis deest interpretatio physica : seponenda est, ut inepta, interpretatio mechanica theoriae Bohr et Sommerfeld ; servari neque potest interpretatio physica functionis Ψ primo a Schrödinger proposita.

2. Interpretatio statistica de distributione electronum (et idem dicendum est de distributione photonum) comprobata est solum a posteriori. Certe agnoscendae sunt internae proprietates atomorum, quae influunt in illas peculiares evolutiones statisticas ; sed hae proprietates non cognoscuntur nisi modo analogico.

3. Principium Pauli, quamvis manifestet quamdam arctam unitatem compaginis electronicae in atomis, illam tamen non exhibet lineamentis propriis ; et ipsum principium nonnisi a posteriori collectum est, et non explicatur per ipsa principia mechanicae quantisticae.

95. Ceterae sententiae philosophicae, realismo moderato oppositae, nequeunt congruenter inseri elementis scientificis physicae quantisticae.

a. Neopositivismus.

Ut iam notavimus, aspectus formalis cuiusdam peculiaris capitis physicae non sufficit ad probandam thesim agnosticam neopositivismi (cfr. n. 39, a).

Contradicunt vero huic thesi omnes notitiae, quae certo acquisitae sunt de interna structura et evolutione atomorum (cfr. n. 72, a ; 94, a).

Inepte neopositivistae contendunt omnes has notiones nulla alia facta indicare praeter facta empirice comperta (cfr. n. 94, a, 1) ; quae facta exprimimus (aiunt) variis formulis tautologicis, ut illa ad synthesim conceptualem revocemus. Non enim haec est significatio verborum et scientiae physicae : quaesita enim sunt et indicantur talia facta, quae valeant ad producenda, suo influxu, facta distincta empirice comperta.

Neque talia facta interna atomorum suam existentiam amittunt ex eo quod cognoscuntur cognitionibus mere analogicis. Hae enim cognitiones, quamvis imperfectae, sunt verae cognitiones ; ipsa physica quantica hanc rem declarat perspicuis exemplis (cfr. n. 39, b). Recolenda sunt ad hunc propositum, quae notata sunt de prima hypothesi Planck circa « oscillatores elementares » (n. 17) ; de « principio correspondentiae » et de eius applicationibus (nn. 59 ; 76 ; 86, b ; 87, a, d) ; de interpretatione physica functionis Ψ iam proposita a Schrödinger, et de eius aptitudine ad analogice illustrandas veras compagines atomicas (n. 94, a, 3).

b) Legalismus.

Argumentum expositum contra neopositivismum reicit etiam thesim meri legalismi (cfr. n. 39, c). Cognoscuntur enim

internae structurae et evolutiones atomorum, quae etiam causae sunt, quae influunt in productionem phaenomenorum, quae directe conspicimus.

c Empirismus.

Neopositivismus profitetur purum empirismum; argumenta, quae iam exposita sunt contra neopositivismum, confutant etiam empirismum.

Aliquando condicio posita ab Heisenberg de definitione operativa confunditur cum thesi empirismi. Quod perperam fit; nam regula illa admittit etiam experimenta mere idealia, quae practice nullatenus perfici possunt; insuper (quod maxime notandum est) admittit etiam ut inserantur in descriptionibus physicis illa entia, quae indirecte tantum attinguntur experimentis. Quare , etiamsi quis vellet severe applicare condicionem definitionis operativae cuilibet investigationi physicae, delimitaret ambitum huius scientiae intra fines experimentales, sed illam non coarctaret ad merum empirismum.

d. Conventionalismus.

1. Tota physica quantica confutat hanc thesim: mira schemata construi possunt; tamen, si non congruunt cum natura obiecti describendi, inepta manent, et novae descriptiones conficiendae sunt.

Prima hypothesis Planck postulavit hypothesim anticlassicam, quae admitti debuit, quia schemata classica comprobata sunt inepta ad describendum spectrum corporis nigri.

Exemplaria atomica, laboriose elaborata iuxta theoriam quanticam semiclassicam, relinqui debuerunt ut inepta ad describenda aedificia atomica.

Duae novae constructiones theoreticae mechanicae quantisticae, quamvis eximia sagacitate perfectae, retineri potuerunt tantum propter eorum congruentiam cum obiectis describendis, a posteriori comprobatam.

Haec necessitas aptandi nostra schemata theorica obiectis describendis non solum confutat conventionalismum, sed etiam ostendit indolem cognitionis scientificae et generatim omnis nostrae cognitionis: obiectum scilicet nostrae scientiae non elaboratur a nostra scientia; sed constitutum est in re, et nostra investigatio illi adhaerere debet.

2. Haec animadversio opponitur etiam illis assertionibus (quae relativismum sapiunt), quae ita exhibent scientiam physicam et eius progressus, perinde ac si non daretur terminus fixus detegendus, mundus scilicet physicus, prout reapse constitutus est; sed potius progressus scientiae dicuntur produci in directiones varias, abrupte diversas; et tunc maxime contingere cum nova inventa totam scientiam anteactam subvertunt.

Physica quantistica perspicue declarat quam inepte haec asserantur. Hypothesis enim Planck procul dubio recensenda est inter inventa quam maxime subversiva; et tamen tota physica quantica nequit exhiberi ut scientia nova, quae progressum nostrarum cognitionum direxerit iuxta directionem diversam.

Etenim, anteacta scientia classica non solum recentiores progressus paravit, sed etiam praebuit auxilia necessaria ad construendum novum aedificium. Quod dicendum est sive quoad constructionem theoriae quanticae semiclassicae, sive quoad constructionem recentiorum theoriarum quantisticarum.

Schrödinger totum suum aedificium construxit supra classicam analogiam inter opticam et mechanicam, quam extendit etiam ad aequationem undarum opticae physicae; prima interpretatio physica functionis Ψ omnino classica dicenda erat; quod si retineri non potuit, nihilominus valet ad analogice illustrandam compaginem atomicam.

Similiter Heisenberg novas leges mechanicae excogitavit, applicando principium correspondentiae (quo statuitur relatio inter nova inventa et physicam classicam); et etiam applicavit classicas relationes analyticas aequationum Hamilton.

Constructio tandem novae micromechanicae nullatenus eliminavit scientiam classicam, quae pergit doceri , ut omnino apta ad describendum macrocosmum; et cum tali scientia congruenter copulatur nova minutissima descriptio microcosmi. Immo criterium adhibitum (sive a Schrödinger sive ab Heisenberg) ad definiendas novas micromechanicas fuit earum neces-

saria congruentia cum descriptionibus classicis macroscopicis, cum systemata praetergrediuntur fines microscopicos. Et ipsae « probabilitates », quas nova micromechanica assignat singulis phaenomenis elementaribus, non hauriuntur nisi a posteriori ex lineamentis characteristicis phaenomenorum macroscopicorum, et pergunt definiri formulis analyticis desumptis ex physica classica (cfr. nn. 84 ; 87, a, 2).

Articulus II.

De principio causalitatis

96. Origo et indoles quaestionis.

Aequationes physicae classicae, ut iam expositum est (cfr. n. 89), generatim redactae sunt ad normam peculiaris determinismi, vi cuius ex exacta cognitione status initialis definiti systematis colligitur eius integra et exacta evolutio, quae propterea etiam praedici potest modo plene determinato.

Haec autem generalis regula consuevit denominari (inepte quidem) « principium causalitatis », quia antecedentes status physici systematum habebantur ut « causae » determinantes subsequentes evolutiones systematum. Hac ipsa denominatione « principii causalitatis » expressis verbis solet etiam designari illa generalis « possibilitas praedicendi » exactas evolutiones singulorum systematum.

Congruentia tandem talium aequationum physicarum cum phaenomenis describendis visa etiam est comprobare (argumento physico) plenum determinismum mundi physici. Quare etiam determinismus mundi physici dictus est obtemperare « principio causalitatis ».

Aequationes vero physicae quantisticae redactae sunt novis criteriis, quae inferunt principium indeterminationis ; excluditur in primis possibilitas exprimendi exactas et simultaneas mensuras omnium parametrorum, definientium status physicos systematum ; sequitur necessaria indoles statistica legum physicarum, quae propterea (si referuntur ad evolutiones singulorum systematum) iam non enunciant nisi meras « probabilitates » (cfr. n. 32, a, b).

Iamvero aequationes et methodi physicae classicae impares fuerunt ad describenda microphaenomena ; physica vero quantistica miro successu solvit problema, adhibendo methodos statisticas. Quare physici, ad strictius examen revocantes methodos physicae classicae, notaverunt in primis determinismum mundi physici iam admissum esse sine vera comprobatione physica ; si nihilominus admissus est, concluserunt, hoc factum est vi praeiudicii philosophici circa necessitatem « principii causalitatis ». Quare tandem ipsum « principium causalitatis » ad examen revocandum erat ; ipsum saltem applicari iam non poterat ad microphaenomena.

Omnes hae quaestiones, his verbis enunciatae, supponunt consuetudinem accipiendi tamquam expressiones aequipollentes : « principium causalitatis », « determinismum mundi physici », « possibilitatem praedicendi exactas evolutiones systematum » et alias locutiones huiusmodi. Si attendimus vero non iam ad varias locutiones adhibitas, sed ad quaestiones quae reapse positae sunt, haec dicendae sunt verti unice (saltem directe) circa determinismum vel non determinismum mundi physici.

Quare de hac una quaestione proprie agendum est, de qua tractat sequens articulus ; praemittenda vero est distincta quaestio « de principio causalitatis » quatenus « principium causalitatis », de quo physici loquuntur, late confusum est cum « principio causalitatis » philosophiae scholasticae, adeo ut non desint auctores, qui ex physica quantistica desumant argumenta ad infirmandas probationes quibus assurgimus a creaturis ad Deum, vi principii causalitatis. Tales autem aequivocationes, quae facile etiam divulgantur, sedulo declarandae sunt.

97. De diversis rebus, quas physici et metaphysici designant eadem denominatione « principii causalitatis ».

a. De significatione « principii causalitatis » apud physicos.

Hae significationes iam satis expositae sunt (cfr. nn. 89 ; 96) ; plures res eadem denominatione designantur, scilicet :

1. Regula generalis iuxta quam redactae sunt aequationes physicae classicae, quibus tributa est structura determinata et determinans : determinata et exacta ratione definiuntur status physici singulorum systematum ; determinatis nexibus inferuntur subsequentes evolutiones systematum.

2. Possibilitas praedicendi integram et exactam evolutionem definiti systematis, si cognoscuntur exacti valores simultanei omnium parametrorum (cinematicorum et dynamicorum) describentium status physicos eiusdem systematis, et vires quae in ipsum systema agunt.

3. Determinismus mundi physici, qui supponitur evolvi iuxta ipsas determinatas descriptiones physicae classicae.

b. De significatione « principii causaltatis » apud philosophos.

Non consideramus in praesenti nisi sententiam philosophiae scholasticae.

Principium causalitatis est ipsum principium rationis sufficientis applicatum ad res quae producuntur. Nequeunt enim non dari rationes sufficientes huius productionis ; sed hae ipsae rationes, quae influunt in productionem cuiusdam rei novae, nequeunt esse unum idemque ac res quae producuntur : datur propterea causa distincta (saltem aliqua ratione) ab effectu.

Nonnullae notae manifesto distinguunt tale principium a principio homonimo physicorum ; etenim :

— hoc principium philosophicum per se non postulat determinismum ; immo nobiliores causae (Causa prima et causae secundae liberae) determinismo non sunt obnoxiae ;

— causa et effectus non necessario sunt antecedentes et subsequentes quoad tempus ;

— vi principii causalitatis ascensus fit ex effectibus ad

causas ; et principium ipsum per se nullum medium porrigit ut ex cognitione causae colligatur exacta praevisio effectus (speciatim si de causis liberis agitur).

98. De usu principii causalitatis (metaphysici) in ipsa recentiori investigatione physica.

Adeo physica quantistica non eiurat hoc principium ut illud implicite applicet et supponat : si quid producitur (effectus) aliquid aliud inquiritur (causa), quod in phaenomenon influat (influxu causali), et tale sit quod rationem reddat de notis propriis effectus.

Exempla rem illustrant.

Effectus	*Causae*
— Spectrum « corporis nigri » ; i. e. : variae densitates energiae pro variis frequentiis.	— Elementa prima materiae irradiantia energiam per « quanta » (PLANCK).
— Effectus photoëlectricus et eius notae propriae.	— Photona (EINSTEIN).
— Effestus COMPTON.	— Impulsus photonum.
— Velocitates variae et per saltus distinctae guttularum olei.	— Structura atomistica electricitatis (MILLIKAN).
— Flexiones particularum α.	— Nuclei atomici (RUTHERFORD)
— Distincta vestigia in lamina photographica.	— Isotopa (ASTON).
— Spectra characteristica elementorum.	— Gradus energetici atomorum (BOHR-SOMMERFELD).
— Variationes per saltus fluxus electronici.	— Absorptiones energiae pro distinctis gradibus energeticis (FRANCK, HERTZ).
— Separata vestigia in lamina photographica (STERN, GERLACH).	— Proprietates magneticae atomorum, distinctis directionibus praeditis (quantificatio spatialis).

Non omnes investigationes physicae inquirunt causas phaenomenorum; tamen investigationes huiusmodi non desunt. Physici possunt etiam explicite non cogitare de principio causalitatis (metaphysico) cum tales investigationes peragunt, sed reapse illud implicite (vel inscii) applicant.

Etenim, procul dubio (ut exempla exposita declarant), conspicientes effectum productum, inquirunt aliquid (ab ipso effectu distinctum), quod in effectum influat influxu causali; etiam expressis verbis loquuntur de influxu causali (ipsi positivistae hanc locutionem adhibent).

Ut talis investigatio dicatur vere applicare ipsum principium causalitatis metaphysicum, alia condicio addenda est. Principium enim metaphysicum affirmat necessitatem causae: causa scilicet (utpote necessaria ratio sufficiens effectus) potest nos latere, sed certe non deest. Sed etiam hanc necessitatem physicus implicite admittit, cum, non obstantibus difficultatibus, cum fiducia quaerit adaequatam explicationem phaenomeni. Quod si quaedam peculiaris hypothesis invenitur inepta ad peculiarem effectum producendum (ut ex. gr. hypothesis Thomson de structura atomi, inepta ad producendas certas deflexiones radiationum α) physici sine ulla haesitatione excludunt ut impossibilem ipsam hypothesim; haec autem impossibilitas asseri non potest, si effectus supponitur produci posse sine causa quae rationem sufficientem reddat; insuper physici cum fiducia inquirunt aliam adaequatam hypothesim.

Si vero physici serio admitterent aliquid produci posse sine causa sufficienti, semper ancipites manerent in suis investigationibus, constanter parati etiam ad non excludendam hypothesim imparem ad producendos effectus.

Tandem, si talis sententia vere tenetur, non colligitur ex experimentis physicis; quare hauritur ex sententiis philosophicis, ita ut nullo modo principium causalitatis dici possit ab ipsa scientia physica impugnatum.

Ex contrario, si quis serio dubitaret de universali necessitate principii causalitatis, contradiceret ipsi scientiae physicae. Etenim, si phaenomena de quibus physica agit referuntur ad mundum externum (et talis est significatio scientiae physicae), tres hypotheses concipi possunt: vel affirmantur certe dari in ipso mundo externo eorum adaequatae causae (quo in casu affirmatur realismus philosophicus et principium causalitatis), vel ipsa phaenomena supponuntur produci nostra ipsa cognitione, aut creari posse per se, sine ulla dependentia ab alio facto.

Iamvero neutra ex duabus ultimis hypothesibus potest copulari cum scientia physica: periret ipsum principium conservationis energiae, quod scientia physica recenset ut factum empiricum universale, quod confirmant ipsa phaenomena elementaria ultramicroscopica.

Una coniectura potest hanc conclusionem eludere, scilicet: necessario affirmanda est causa sufficiens cuiuslibet phaenomeni, quatenus phaenomenon ipsum postulat dispendium energiae; sed, si quoddam systema potest evolvi iuxta duos modos diversos (aequipollentes sub aspectu energetico), una vel alia evolutio admittitur produci posse sine peculiari causa quae determinet «electionem»; talis determinatio dicenda esset «acausalis».

Reapse non desunt physici, qui hanc possibilitatem non audent negare, quia eis desunt argumenta empirica ad illam excludendam. Sub hoc peculiarissimo aspectu principium causalitatis (sensu metaphysico intellectum) involvitur in quaestione de determinismo vel non determinismo mundi physici; sed haec quaestio maiori declaratione indiget ut sine aequivocatione ponatur.

Articulus III.

De determinismo vel non determinismo mundi physici.

99. Origo quaestionis.

Physica classica, sine controversia et sine haesitatione, admiserat plenum determinismum mundi physici. Ordo constans macrocosmi iam visus erat praebere argumentum non dubium;

confirmarunt hanc persuasionem aequationes physicae, quae, ad normam determinismi redactae, egregie congruebant cum phaenomenis describendis.

Determinismus mundi physici sine limitatione affirmatus erat, et tributus etiam est mundo microscopico et ultramicroscopico, quem experimenta non attingebant. Theoria cinetica aëriformium in lucem tulerat exemplum peculiaris ordinis macroscopici, qui non identidem instauratur in microcosmo, sed qui est ordo mere statisticus, exhibens solum constantes valores medios valorum elementarium fluctuantium ; tamen ipsa agitatio molecularum, et motus uniuscuiusque moleculae supponebatur obtemperare pleno determinismo, ita ut theoretice admitti posset exacta descriptio phaenomeni microscopici iuxta ipsa schemata macroscopica mechanicae rationalis ; obstare censebatur sola practica impossibilitas colligendi exactas et simultaneas mensuras omnium coordinatarum et impulsuum molecularum.

Sed tandem aequationes classicae ineptae exstiterunt ad congruenter describenda microphaenomena ; novae autem aequationes physicae quantisticae, quae cum successu problema solverant, pro sua indole statistica, iam non praebebant argumentum physicum pro determinismo microcosmi. Quare determinismus mundi physici visus est iam admissus sine vera comprobatione ; neque in dubium revocabatur solus determinismus microcosmi, sed etiam determinismus macrocosmi, qui constat innumeris systematibus elementaribus microscopicis.

Haec argumenta, si dubium ponebant circa determinismum, non tamen sufficiebant ad illud excludendum ; si comprobandus vero erat argumentis physicis, demonstratio aliter perficienda erat.

A posteriori procedendum est ; omnes autem mensurae empiricae directe non suppeditant nisi valores medios statisticos, et consequenter non ducunt nisi ad redigendas relationes statisticas ; haec condicio nequit superari, sive quia nequeunt evitari omnes errores mensurarum, sive quia nequeunt perpendi omnia parametra quae reapse influunt in

phaenomena. Quare ipsa physica classica suas leges exactas refert ad status ideales, negligendo inexactitudines mensurarum et plura adiuncta.

Etiam in his adiunctis vero, determinismus physicus apte definiretur et comprobaretur argumentis physicis si experimenta ostenderent relationes inter valores medios statisticos magis ac magis accedere ad certam legem quo maiori exactitudine colliguntur mensurae et quo plenius perpenduntur omnia parametra quae influunt in phaenomena.

Sed hae condiciones, quas nullus physicus a priori excludit, nequeunt componi cum methodis physicae quantisticae, quae essentialiter inferunt descriptiones statisticas. Obstat principium indeterminationis, vi cuius exacta mensura omnium parametrorum nequit simul sive colligi sive exhiberi per formulas mechanicae quantisticae : stat enim inter parametra cinematica et parametra dynamica relatio illa inversa, propter quam quo magis exacte fiunt mensurae unius seriei parametrorum, eo magis indefinitae fiunt mensurae parametrorum alterius seriei.

Hae animadversiones respiciunt peculiarem methodum descriptionis mechanicae quantisticae ; sed haec redactio est sola quae comprobata est apta ad describendum sine incongruentiis microcosmum, necnon macrocosmum ; quare problema non solvitur talibus argumentis physicis, et quaestio ponitur de determinismo vel indeterminismo mundi physici.

100. Thesis philosophica de agente physico determinato ad unum et sententiae physicorum de determinismo vel indeterminismo mundi physici directe versantur circa obiecta distincta.

Quaestio de determinismo vel indeterminismo physico potest in primis poni tamquam quaestio interna scientiae physicae : ipsi physici quaesiverunt utrum redactio statistica legum physicarum censenda sit stabilis et firma, an dari possit reditus ad redactionem legum determinatarum, iuxta methodum classicam. Haec peculiaris quaestio exhiberi etiam potest tamquam quaestio de determinismo vel non determi-

runtur peculiares proprietates internae atomorum, quae sunt ipsum fundamentum physicum legum statisticarum.

Iamvero, dum thesis philosophica has proprietates essentialiter considerat, scientia physica illas non considerat, quia (deficiente interpretatione physica aequationum) illas non potest suis methodis exprimere et inscribere in aequationibus.

Hae considerationes sufficiunt ad declarandam distinctionem inter obiecta, quae directe spectant sententia philosophica et scientia physica ; quae distinctio potest paucis ita exprimi : scientia physica non perpendit nisi peculiares notas, quas potest suis methodis exprimere et inscribere in aequationibus ; affirmatio philosophica vero spectat etiam alia elementa, quorum existentia negari non potest.

101. Sentential philosophica et conclusiones mere scientificae neque indirecte mutuo se excludunt.

a. Thesis philosophica non affirmat actionem determinatam ad unum nisi de agentibus physicis substantialibus, prout instructa sunt omnibus proprietatibus et auxiliis necessariis et sufficientibus ad agendum. Quare, si haec condiciones deficiunt, deficit ipsa affirmatio ; et iam non excluditur possibilitas peculiarium notarum (quibus describuntur status physici antecedentes et consequentes) inter quas non dentur nexus determinati.

Hanc possibilitatem clare illustrant phaenomena radioactivitatis : dantur elementa radioactiva, quae naturaliter ineunt notos processus transformationis ; scientia physica recenset pro variis elementis varias durationes « vitae » atomorum, quae antecedunt emissiones radioactivas ; non definiuntur vero nisi « vitae mediae », quia durationes distinctarum atomorum unius eiusdemque elementi immensum discrepant inter se. Quare, si considerantur solae notae communes quae cognoscuntur de atomis definiti elementi, et possibiles termini earum vitarum, non dantur inter istas notas nexus determinati ; sed illae ipsae notae communes possunt cum variis durationibus copulari.

Haec conclusio non contradicit thesi philosophicae, quia analysis phaenomeni negligit quosdam factores, quos ignoramus, qui certe influunt in processum radioactivum, et nequeunt non dari : nectuntur cum illis ipsis proprietatibus, quae constituunt necessarium fundamentum physicum illarum legum statisticarum, quae colligunt vitas medias diversas pro diversis elementis.

Ipsa conclusio (quae non contradicit thesi philosophicae) ostendit etiam possibilitatem defectus nexuum determinatorum inter nonnullas notas physicas, quibus describuntur evolutiones phaenomenorum. Talis autem defectus nexuum determinatorum est quidam « indeterminismus », qui etiam « physicus » dici potest : non solum enim agitur de defectu nexuum determinatorum in nostris descriptionibus, sed in re ipsa illae peculiares notae non nectuntur una sola ratione.

b. Neque vicissim conclusiones mere scientificae physicae quantisticae valent ad statuendum argumentum contra thesim philosophicam de agentibus physicis determinatis ad unum.

Descriptiones enim rerum et phaenomenorum, quas physica quantistica suis methodis producit, manent partiales, et obiecta non exhibent ipsis lineamentis propriis (cfr. n. 94, b) ; quare, etiamsi in his adiunctis colligantur nexus non determinati inter nonnullas notas describentes evolutiones systematum, nequit haec conclusio conicere indeterminismum physicum perstare etiam in adiunctis essentialiter diversis, quae thesis philosophica supponit. Talis illatio excederet vim praemissarum.

Neque tale punctum est obiectum controversiae : omnes enim agnoscunt indolem essentialiter statisticam physicae quantisticae et principium indeterminationis non sufficere ad logice excludendam possibilitatem instaurandi (alia methodo) descriptiones determinatas phaenomenorum (cfr. n. 92 a) ; a fortiori igitur non excluditur nostra thesis philosophica, quae neque postulat talem redactionem aequationum physicarum.

Neque obstat hypothesis de aptitudine functionis Ψ ad describendos universos status physicos et universas evolutiones. Ad confutandam enim illam determinationem ad unum, quam thesis philosophica propugnat, non sufficit indeterminismus descriptionum phaenomenorum, sed requirerentur tales descriptiones, quae etiam essent adaequatae et propriae, ita ut

nihil maneat in re, quod suis ipsis lineamentis non reproducatur in descriptionibus, et nihil sit in descriptionibus, quod non stet etiam in re iisdem charecteribus. Sed descriptiones physicae quantisticae nec tales sunt, neque tales esse possunt : inter cetera quae notari possunt, adhibent elementa, ratione elaborata, quae non exprimunt rem physicam (sicut undae, quarum velocitates phasis excedit velocitatem lucis) ; neque deficeret interpretatio physica functionis Ψ si res repraesentarentur suis lineamentis propriis.

102. Thesis philosophica de agentibus determinatis ad unum et physica quantistica egregie congruunt.

Argumenta in praecedentibus paragraphis exposita ostendunt thesim de agentibus physicis determinatis ad unum et conclusiones scientificas circa peculiares indeterminismos physicos verti directe circa obiecta distincta, et non esse tales ut ex una sententia colligi possint demonstrationes contra alteram sententiam. Quaeri nihilominus potest an notari possit quaedam incongruentia inter duas sententias, ita ut descriptiones physicae quantisticae (essentialiter statisticae, et aptae ad referenda universa phaenomena physica) aegre componantur cum idea de entibus determinatis ad unum (etiamsi haec proprietas referatur ad adiuncta diversa).

Talis difficultas adhuc serio proponi posset si indoles statistica physicae quantisticae inferret descriptiones phaenomenorum undequaque indeterminatas. Contrarium vero contingit (cfr. n. 92, c) : plurima enim elementa (sive systematum physicorum, sive eorum evolutionum) modo determinato definiuntur ; quoties autem peculiares notae exprimuntur descriptionibus mere statisticis, semper agitur de aspectibus phaenomenorum, quorum processus nos latent : ita dicendum est de descriptione statistica intensitatum radiationum, quae respondent ignotis internis evolutionibus energeticis singulorum atomorum ; idem animadvertendum est quoad « vitam mediam » atomorum radioactivarum, cui respondent ignotae internae condiciones atomorum, quae influunt in processus radioactivos. Insuper (ut satis declaravimus) ipsae leges statisticae, quae

haec phaenomena describunt (sive radioactivitatis, sive radiationum electromagneticarum ab atomis egredientium), nobis indicant necessitatem admittendi in singulis atomis quasdam proprietates, quae nos latent, sed quae influxum exercent in ipsa phaenomena, adeo ut determinent leges statisticas varias pro varia natura et pro varia condicione physica atomorum.

Rebus sic stantibus, ipsa data scientifica dicenda sunt potius per se ipsa ducere ad conicienda entia physica, quorum actio determinatur ad unum quoties dantur adiuncta quae thesis philosophica supponit.

Quod si quis, etiam pro talibus adiunctis, negat (vel solum in dubium revocat) actiones entium physicorum esse determinatas ad unum, hanc sententiam non colligit (ut probavimus) ex elementis mere scientificis, sed ex quadam sententia philosophica. Quare iam non agitur de controversia inter scientiam et philosophiam, sed inter diversas scholas philosophicas.

Principia autem philosophica quae opponi possunt nostrae thesi (de agentibus physicis determinatis ad unum) ea sunt quae propugnant purum empirismum, ut neopositivismus scholae Viennensis ; quamvis huiusmodi scholae (quae proprie ametaphysicae dicendae sunt) non alias conclusiones affirmare deberent ad hunc propositum quam conclusiones mere agnosticas. Ut positive vero affirmetur indeterminismus (etiam pro adiunctis pro quibus philosophia scholastica affirmat actiones determinatas) sententia philosophica, quae implicite applicatur, haec est : « ea sola existunt quae argumentis mere empiricis comprobata sunt ». Sed tali sententiae obstat ipsa scientia physica : non enim nova inventa tunc coeperunt existere cum detecta sunt ; insuper analysis critica de significatione et vi principii indeterminationis (cfr. n. 92, b) non excludit possibilitatem novae redactionis physicae (ad determinismum conformatae), quae, si produci potest, confirmat sententiam philosophicam scholasticam. Quare ipsa scientia physica reapse contradicit affirmationibus illis extremis, quae talem indeterminismum ponunt in mundo physico, qui excludat etiam thesim scholasticam de agentibus physicis determinatis ad unum.

103. Leges physicae et earum firmitas.

Character probabilisticus legum quantisticarum ita passim exhibetur perinde ac si leges naturae exhuerint totam suam firmitatem, et quaelibet phaenomena iam censenda sint produci posse (vi ipsarum virium naturalium), quamvis raro vel rarissime, prout postulat lex grandium numerorum. Huiusmodi assertiones tam universatim etiam feruntur ut ipsa miracula (sine ulla distinctione factorum) pronuntientur esse non iam contra leges naturae, sed solum facta (rarissima quidem), quae tamen (inspectis omnibus combinationibus possibilibus, etsi maxime improbabilibus) aliquando sponte produci possunt.

Non vero scientia physica haec asserit.

a. Notandum est in primis peculiaris et profunda firmitas, quam ipsae recentiores leges probabilisticae vindicant pro phaenomenis physicis, plus quam scientia classica. Leges enim classicae (quae nonnisi a posteriori comprobandae erant, et quae pro solo macrocosmo reapse confirmatae sunt) non pari iure extendi poterant ad microcosmum ; quare reapse quaedam dubia concipi poterant circa evolutionem phaenomenorum elementarium, necnon circa phaenomena macroscopica, quae plurima inconsueta phaenomena elementaria componere poterant.

Sed leges physicae quantisticae removent talia dubia : probabilitates enim, quas enunciant de microcosmo, tales sunt quae omnino ducunt ad ordinem macroscopicum, iuxta principium correspondentiae Bohr ; etenim, sive Schrödinger sive Heisenberg, inter principia constitutiva novae micromechanicae posuerunt hoc principium, postulando tales evolutiones elementares, quae congruerent cum ordine iam redacto a physica classica, cum primo systemata excederent fines microscopicos (et ad hunc propositum iam censenda sunt mascoscopica phaenomena adeo minima, quae nullo microscopio directe observari possunt). Iamvero exacta congruentia, qua novae aequationes reapse descripserunt microphaenomena (etsi methodo statistica) ostendit ipsas leges recte redactas esse ; quare physica quantistica nos certiores fecit de peculiari ordine

(congruenti cum schematibus classicis macroscopicis), qui iam stat in structuris ultramicroscopicis, quas experimenta directe non attingunt.

Neque deficit vis huius conclusionis ex eo quod agitur de legibus statisticis, quae enunciant valores medios, circa quos reapse producuntur « fluctuationes ». Non enim ex eo quod leges sunt statisticae iam non sunt leges : phaenomena elementaria, quorum lineamenta discrepare possunt a lineamentis (mediis) phaenomenorum collectivorum, manent intra fines quos ipsae leges statisticae indicant ; sunt illi ipsi fines, qui graphice repraesentantur extremis propaginibus diagrammatum legum statisticarum. Quod si quoddam phaenomenon praetergreditur hos fines, iam apparet ipsum evolutum esse sub influxu peculiaris causae, extraneae legi statisticae : ita ex. gr. errores, qui pro sua frequentia cadunt extra lineam gaussianam de erroribus accidentalibus, iam censeri nequeunt ut errores accidentales, et manifestant aliam causam heterogeneam. Et si in quolibet phaenomeno descripto lege statistica producuntur aliquando « fluctuationes » attingentes valores minus consuetos, illae ipsae « fluctuationes » fugacissimae sunt quoad durationem. Insuper ipsae leges statisticae involvunt peculiares condiciones, quibus phaenomena absolute obtemperare debent ; ex. gr. absolute impossibile est ut omnes moleculae definitae massae aëriformis (in aequilibrio thermodynamico) simul acquirant velocitatem maxime probabilem : obstat necessaria conservatio energiae (cfr. nn. 31, 32).

b. Aliae assertiones erroneae eae sunt quae referunt « probabilitates » quorumlibet phaenomenorum ad illum typum probabilitatum, quas definivit Boltzmann describendo motum cahoticum molecularum aëriformium. Leges vero statisticae quam plurimae et diversissimae sunt pro vario genere phaenomenorum ; singulae leges innituntur suo peculiari fundamento physico, quod ponit nonnulla peculiaria vincula inter distinctos eventus elementares. Ipsae leges statisticae, quas Boltzmann descripsit, non sunt nisi leges approximatae ; si alia vincula considerantur, colliguntur recentiores leges statisticae, quas redegerunt Fermi, Bose, Einstein. Aliae praeterea sunt leges

statisticae de erroribus accidentalibus, aliae leges statisticae de distributione photonum, aliae leges statisticae de distributione electronum in compagine atomica.

Quaevis autem lex statistica ea phaenomena elementaria aestimat «probabiliora», quae maiori frequentia (vel densitate) producuntur in phaenomenis collectivis. Si vero sine discrimine «probabilitates» variorum phaenomenorum referendae essent ad varias complexiones possibiles, quas Boltzmann recensuerat pro moleculis aëriformium, quodlibet phaenomenon macroscopicum, quod exhibeat peculiarem et fixum ordinem, dicendum esset quam maxime improbabile; dum, e contrario, eius probabilitas eo maior dicenda est quo maior est eius firmitas. Tales autem maiores firmitates explicantur per diversa fundamenta physica variarum legum statisticarum: si quaedam fundamenta ponunt plura vel severiora vincula, colliguntur maiores stabilitates pro phaenomenis macroscopicis magis ordinatis.

Hae animadversiones manifestant peculiarem firmitatem, quae agnoscenda est legibus biologicis. Scientia biologica recenset plurimas leges non statisticas, sed omnino determinatas, etiam pro singulis phaenomenis elementaribus (nonnullae leges huiusmodi comparari possunt cum legibus determinatis quibus obtemperant numeri quantici in singulis atomis). De plurimis aliis factis biologicis et de eorum evolutionibus non pauca adhuc ignorantur, quae sunt obiecta indagationum; semper vero, cum ignorantur peculiares leges quae moderantur phaenomena, licet quaedam descriptio statistica, quae ut «probabiliora» recenset ea phaenomena quae frequentius vel stabilius producuntur; cum vero hae praerogativae (ad phaenomena biologica quod attinet) competant phaenomenis quam maxime ordinatis, iure colligimus fundamentum physicum harum descriptionum statisticarum exhibere plurima vincula firma. Phaenomena igitur macroscopica, quae tali ordini non obtemperant, non evolvuntur iuxta leges statisticas, et hac ipsa discrepantia renuntiant influxum aliarum causarum; quae conclusio nominatim affirmanda est de miraculis proprii nominis.

BIBLIOGRAPHIA

A. Tractatus Mechanicae Quantisticae

Bloch E., *L'ancienne et la nouvelle théorie des quanta.* Paris, Hermann 1930.

Bohr N., *La théorie atomique et la description des phénomènes.* Paris 1930.

— *Ueber die Quantentheorie der Linienspektrum.* Wieweg und Sohn, Braunschweig 1923.

Born, *Vorlesungen über Atommechanik.* Springer, Berlin 1925.

Darrow, *Introduction to contemporary physics.* New York, D. Van Nostrand Company 1939.

De Broglie L., *Ondes et corpuscules.* Paris, Hermann 1930.

— *Introduction à l'étude de la mécanique ondulatoire.* Paris, Hermann 1930.

Dirac, *The principles of quantum mechanics.* Oxford 1947.

Fermi, *Introduzione alla fisica atomica.* Zanichelli, Bologna 1928.

Frenkel J., *Wawe mechanics, elementary theory.* Oxford 1932.

— *Wave mechanics, advanced general theory.* Oxford 1934.

Heisenberg W., *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie.* Leipzig 1930.

Pauli W., *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik - Handbuch der Physik*: H. Geiger-K. Scheel, Vol. XXIV. Berlin 1933.

Persico E., *Fondamenti della meccanica atomica.* Zanichelli, Bologna 1945.

— *Lezioni di meccanica ondulatoria.* Padova 1935.

Schrödinger E., *Abhandlungen zur Wellenmechanik.* Leipzig 1928.

— *Mémoires sur la méchanique ondulatoire.* Paris 1933.

Sommerfeld A., *Atombau und Spektrallinien.* Braunschweig 1922.

— *Wellenmechanik Ergänzungsband.* Braunschweig 1929.

B. Opera utilia quae consulantur

Brunetti R., *L'atomo e le sue radiazioni.* Bologna, Zanichelli 1932.

Castelfranchi G., *Fisica moderna.* 6ª ediz., Hoepli 1941.

De Broglie L., *I quanti e la fisica moderna* (versione italiana). Einaudi 1942.

— *La physique quantique restera-t-elle indéterministe?* Paris, Gautier-Villars 1953.

Perucca E., *Fisica generale e sperimentale.* U.T.E.T., 4ª ediz. 1941.

Reichenbach H., *Philosophic foundations of quantum mechanics.* University of California Press (versione italiana: Einaudi 1954: *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*).

Straneo P., *Materia, irraggiamento e fisica quantica.* Enciclopedia delle matematiche elementari. Milano 1947.

Zammarchi A., *Fisica dell'atomo.* La «Scuola», Brescia 1946.

INDEX

PARS I

DE PHYSICA QUANTICA ET DE NATURA RADIATIONUM

Sectio I

DE HYPOTHESI FUNDAMENTALI PLANCK ET DE EIUS APPLICATIONIBUS PHAENOMENIS OPTICIS

Sectio II

DE INTERPRETATIONE QUANTICA RADIATIONUM ELECTROMAGNETICARUM